Il ne faut pas confondre latitude et latitude !

Pierre Causeret

La latitude géocentrique d'un point à la surface de la Terre est l'angle que fait le plan de l'équateur avec la droite joignant le centre de la Terre à l'observateur. Le principe paraît simple sur la figure ci-contre et pourtant ce n'est pas celle que l'on mesure : en effet, il n'est pas possible à un observateur terrestre de savoir où est situé le centre de la Terre, la verticale du fil à plomb ne passant pas par ce centre.

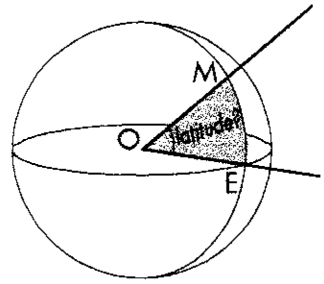


fig. 1

On appelle latitude astronomique celle que l'on mesure, qu'on définit comme l'angle entre le plan de l'équateur et la verticale du lieu.

J'ai longtemps confondu ces deux latitudes. Bien qu'elles ne diffèrent que de quelques minutes d'angle au maximum, cette confusion amène à des contresens.

La verticale

Attachez un objet au bout d'une ficelle un jour sans vent et vous aurez une verticale. Dans un repère terrestre lié à l'observateur, cet objet est soumis à la gravitation mais aussi à l'accélération centripète, due à la rotation de la Terre.

Pour simplifier, imaginons une Terre sphérique. Dans ce cas, le champ de gravitation, noté ici g, est dirigée vers le centre de la Terre (à condition que la répartition de masse soit à symétrie sphérique).

L'accélération centripète, notée c, est perpendiculaire à l'axe de la Terre. La somme des deux vecteurs g et c donne l'accélération de la pesanteur p et la direction de la verticale.

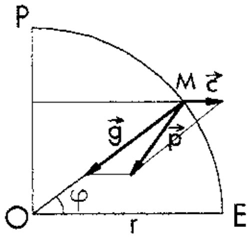


fig. 2

Pour un rayon de 6370 km et une latitude $\varphi = 47°$, on trouve pour la gravitation $g = 9{,}83\ m.s^{-2}$, pour l'accélération centrifuge $c = 0{,}023\ m.s^{-2}$ et pour la pesanteur $p = 9{,}81\ m.s^{-2}$. Quant à la déviation, l'angle entre la verticale et (MO), elle vaut un dixième de degré. Nous verrons tout à l'heure que ce modèle n'est pas très bon.

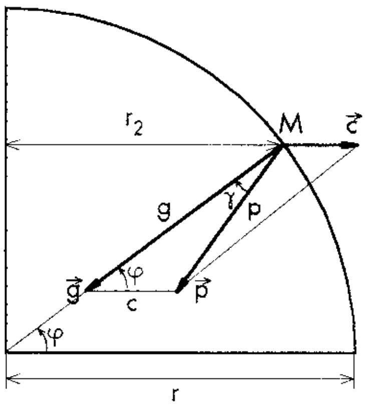


fig. 3

Calculs

■ **données physiques** (unités SI: m, kg, s.)
$G = 6{,}672\ .\ 10^{-11}$ (constante de la gravitation)
$m_T = 5{,}975\ .\ 10^{24}$ (masse de la Terre)
$r_T = 6{,}371\ .\ 10^6$ (rayon de la sphère terrestre)
$\omega = 2\pi\ /\ 86\ 164$ (vitesse angulaire de la rotation terrestre (1 jour sidéral = 23 h 56 min 04 s = 86 164 s).
■ **données et formules géométriques**
φ : latitude du lieu
$r_2 = r \cos\varphi$
γ = déviation de la pesanteur par rapport au rayon
$p^2 = g^2 + c^2 - 2\ g\ c \cos\varphi$ (formule d'Al Kaschi)
$\sin\gamma / c = \sin\varphi / p$
■ **formules dynamiques**
$g = G\ .\ m_T\ /\ r^2$
$c = \omega^2 \cdot r_2$
■ **calculs à partir des données et formules ci-dessus.**
$g \approx 9{,}822$; $\omega^2 \cdot r_T \approx 3{,}388.10^{-2}$;
A la latitude 47 ° on obtient : $c \approx 0{,}023$; $p \approx 9{,}806$ et $\gamma \approx 0{,}0099°$

les formules générales sont :
$c = (\omega^2 \cdot r_T)\ .\ \cos\varphi$;

$$p = \sqrt{g^2 + (\omega^2 r_T)^2 \cos^2\varphi - 2g(\omega^2 r_T)\cos\varphi}$$

$$\gamma = \text{Arcsin}\,\frac{(\omega^2 r_T)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{g^2 + (\omega^2 r_T)^2 \cos^2\varphi - 2g(\omega^2 r_T)\cos\varphi}}$$

φ (°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
γ (°)	0	0,034	0,064	0,086	0,098	0,097	0,086	0,064	0,034	0

La forme de la Terre

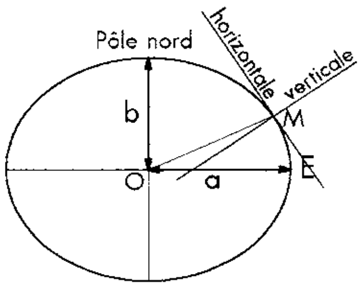
Imaginons que la Terre soit parfaitement sphérique (fig2). Versez de l'eau au point M. Que va-t-il se passer ? La pesanteur va agir sur cette eau en suivant la verticale. Mais comme la verticale ne passe pas par le centre de la Terre, l'eau va s'écouler en direction de l'équateur. Ce type d'expérience nous paraît contre nature : nous savons bien que l'eau n'est pas plus attirée par le sud que par le nord.

Tout simplement parce que la Terre est suffisamment déformable et a pris naturellement la bonne forme, de telle manière qu'une verticale en un point soit perpendiculaire au plan horizontal (plan tangent en ce point à la Terre).

La Terre a approximativement la forme d'un ellipsoïde de révolution du type aplati (rayon polaire < rayon équatorial)

Le rayon équatorial mesure un peu plus de 6378 km contre à peine 6357 pour le rayon polaire. La différence étant 21,4 km, l'aplatissement est de 21,4 / 6378 soit 1 / 298 ou 0,3%. Ces résultats proviennent de mesure.

A partir de ces données, on peut calculer qu'à la latitude de 47°, la verticale s'écarte d'environ 0,2° de la droite (OM).



$a \approx 6378$ km
$b \approx 6357$ km

Aplatissement :
$f = (a - b) / a \approx 1 / 298$

Déviation de la verticale à 47° de latitude : 0,2°

fig. 4

Calculs

(valides sauf aux pôles (les trois tangentes évoquées ne sont pas définies) mais le problème est trivial).
On peut écrire l'équation de l'ellipse sous sa forme paramétrée : $x = a \cos t$ $y = b \sin t$ avec $t \in [0 ; 2\pi[$
Latitude géocentrique φ_c :
$\tan \varphi_c = b\sin t / a\cos t = (b / a) \tan t$
En dérivant x et y en fonction de t, on obtient $x' = -a \sin t$ et $y' = b \cos t$. Le coefficient directeur de la tangente (T) est $y' / x' = b\cos t / (-a \sin t)$
On en déduit le coefficient directeur de la perpendiculaire à (T), la verticale, qui est $a\sin t / b\cos t$ soit $(a / b) \tan t$ (le produit des coefficients directeurs de deux droites perpendiculaires est -1).
Si φ_a est la latitude astronomique, on a donc :
$\tan \varphi_a = (a / b) \tan t$. Et comme $\tan \varphi_c = (b / a) \tan t$, on obtient $\tan \varphi_a = (a^2 / b^2) \tan \varphi_c$
Si φ_c vaut 47°, on trouve $\varphi_a = 47{,}19°$ soit une différence de presque 0,2°.

Retour à la pesanteur

Retour à la pesanteur

Nous avions trouvé un écart de 0,1° seulement dans le premier calcul avec une Terre sphérique. En réalité, la Terre est aplatie aux pôles et le vecteur $\vec{g}$ n'est pas dirigé vers le centre de la Terre à cause de l'attraction du bourrelet équatorial.

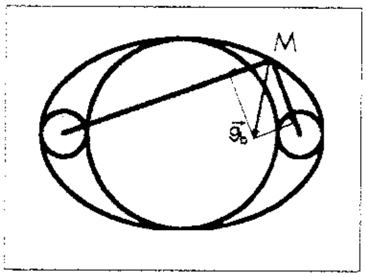


fig. 5 : Attraction due au bourrelet équatorial

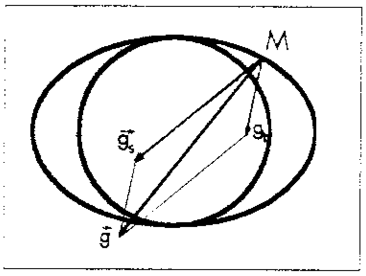


fig. 6 : Attraction totale (sphère + bourrelet équatorial)

Si on rajoute maintenant l'accélération centrifuge, on remarque que la pesanteur est davantage déviée que ce que l'on avait trouvé dans le premier calcul "sphérique". Ce qui permet d'expliquer cette déviation de 0,2° à 47° de latitude. Pour affiner le croquis "sphérique"de la figure 3, il se crée un ellipsoïde et $\vec{p}$ lui est normal (fig.7).

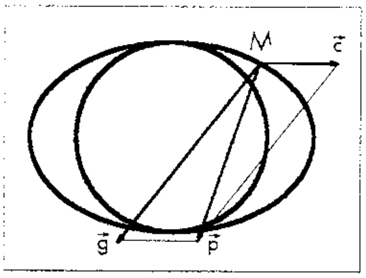


fig. 7 Pesanteur (attraction totale + accélération centrifuge)

Le problème n'est pas simple. Un certain Clairaut avait montré que si la Terre était un fluide homogène, elle devrait prendre la forme d'un ellipsoïde de révolution avec un aplatissement de 1/232.

L'aplatissement mesuré de 1/298 s'explique par des variations de densité entre le centre et la surface de la Terre.

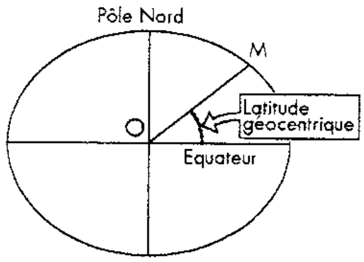
Latitude géocentrique et latitude astronomique

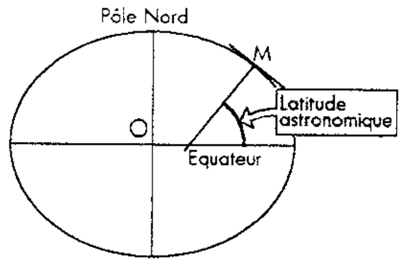
L'écart δ entre la verticale (VM) et la radiale (OM) est la différence entre la latitude astronomique φ_a et la latitude géocentrique φ_c.

La forme de la Terre permet d'établir la correspondance suivante

φ_c (°)	0	10	20	30	40
φ_a (°)	0	10,06	20,12	30,16	40,19
$(\varphi_a - \varphi_c)$	0	0,0648	0,1218	0,1639	0,1862

44,905	50	60	70	80	90
45,09	50,19	60,16	70,12	80,06	90
0,18896	0,1860	0,1634	0,1212	0,0644	0





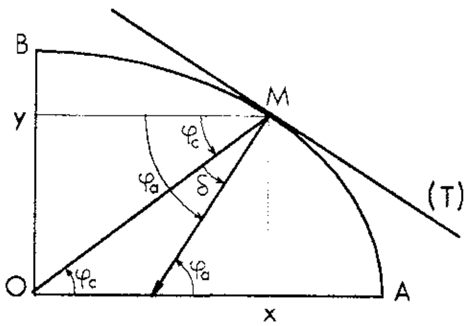


fig. 8

Etude de la déviation :

Etudions de plus près la fonction F donnant la déviation $\delta = \varphi_a - \varphi_c$ en fonction de φ_c.
F : $\varphi_c \mapsto \varphi_a - \varphi_c = \text{Arctan}\left((a^2 / b^2) \tan\varphi_c\right) - \varphi_c$
On trouve qu'elle est maximale en $\varphi_c^* = \text{Arctan}(b / a) \approx 44,9055°$, car sa dérivée,

$$F'(\varphi_c) = -\frac{(a^2-b^2)\ (\tan\varphi_c + b/a)}{b(a^2\tan^2\varphi_c + b^2)}(\tan\varphi_c - b/a)$$

s'annule en changeant de signe (d'abord positive puis négative).
La déviation maximale est alors $\delta_{max} = F(\varphi_c^*) =$ Arc tan (a / b) - Arc tan (b / a) $\approx$ 0,1889

1° de latitude, est-ce plus grand à l'équateur ou aux pôles ?

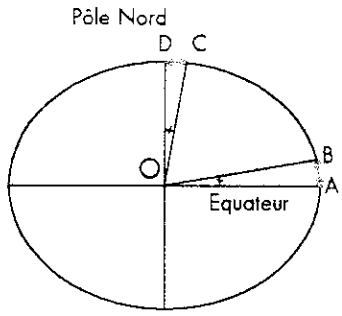


fig. 9

Par 1° de latitude, on entend la distance à la surface de la Terre séparant deux points situés sur le même méridien ayant des latitudes différant de 1°.
Si on parle de latitude géocentrique, alors 1° du côté de l'équateur, c'est plus grand que 1° du côté des pôles (111,3 km contre 110,9).

Mais comme cette latitude n'est pas directement mesurable, c'est à 1° de latitude astronomique que ce sont intéressés les savants du 18e siècle lorsqu'ils partirent en Laponie et au Pérou pour vérifier si la Terre est aplatie aux pôles.

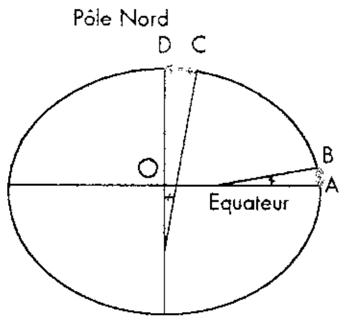


fig. 10

En latitude astronomique, c'est l'inverse.
Les droites passant par A, B, C et D sont des verticales. Seules les verticales aux pôles et à l'équateur passent par le centre de la Terre. Les autres en sont déviées à cause de l'accélération centrifuge d'une part et de l'attraction du bourrelet équatorial d'autre part.
Ces verticales sont des normales à l'ellipse (normale à l'ellipse = perpendiculaire à la tangente).
On peut calculer simplement que 1° de latitude du côté d'un pôle, c'est plus grand que 1° à l'équateur (111,7 km contre 110,6).
Cela signifie que la courbure de l'ellipse est plus importante côté équateur que côté pôle.
Maupertuis avait trouvé 111,9 km en Laponie à 66° de latitude nord contre 111,2 déjà mesurés en France. Au Pérou, Bouguer et La Condamine avait obtenu 110,6 km. La Terre était bien aplatie aux pôles comme l'avait prévu Newton et contrairement aux affirmations de Descartes.
Historiquement, c'est à partir de ces mesures que l'on a pu calculer l'aplatissement de la Terre, à l'inverse des calculs que nous avons fait précédemment.

Remarque :

Les normales à un cercle, ses rayons, passent toutes par le centre. En revanche, les normales à une ellipse (les verticales pour cet article) enveloppent une courbe (c'est à dire en sont les tangentes) que l'on appelle la développée de l'ellipse.

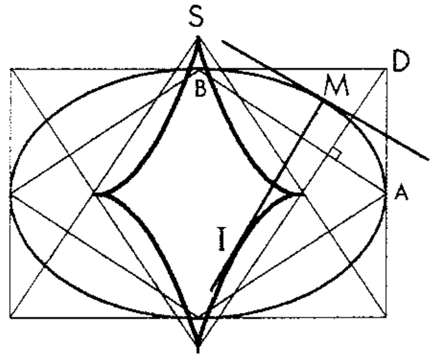


fig. 11

La figure 11 représente la normale en M à l'ellipse E et notamment son point caractéristique I, qui est aussi le centre de courbure pour le point M.
Les coordonnées de M ($x = a \cos t$; $y = b \sin t$) constituent l'équation parmétrique de l'ellipse et celles de I
($X = ((a^2 - b^2) / a) \cos^3 t$; $Y = - ((a^2 - b^2) / b) \sin^3 t$) l'équation paramétrique de la développée.

Notons que la construction des quatre points de rebroussement de la développée est simple. Intersecter aves les axes de coordonnées la perpendiculaire menée par D, sommet du rectangle, au côté [AB] du losange.

Note : Merci à Michel Bobin pour sa relecture attentive et ses remarques.

Bibliographie.

La gravimétrie, Jean Goguel, Collection Que sais-je.
Astronomie générale, Bakouline..., Editions de Moscou.
Questions d'astronomie, tome 3, C. Dumoulin, CRDP du Limousin.
Le procès des étoiles, F. Trystam, éditions Payot (histoire romancée de l'expédition de La Condamine au Pérou).
Théorie de la figure de la Terre, Clairaut, 1808. (cet ouvrage est signalé par Christian Dumoulin dans sa bibliographie mais je ne le connais pas).

■