

Cours élémentaire d'astronomie et d'astrophysique: III- mécanique des mouvements des astres

Georges Paturel, Observatoire de Lyon

Résumé: *Dans ce cours, nous montrons comment les lois empiriques qui régissent le mouvement des astres, les lois de Kepler, ont été retrouvées sur la base d'une nouvelle loi, celle de l'attraction universelle, formulée par Newton.*

Mots-clefs : COURS - LOI - MECANIQUE

Introduction

Dans les cours précédents, nous avons vu comment s'est lentement élaborée la certitude, d'une part que la Terre tournait sur elle-même en un jour, et d'autre part qu'elle avait un mouvement de révolution de 365,25 jours autour du Soleil. Nous avons saisi l'importance primordiale du principe d'inertie qui permettait de comprendre pourquoi un corps céleste, comme une planète, pouvait se mouvoir librement dans l'espace sans avoir besoin d'une force pour maintenir sa vitesse. Cela n'expliquait pas pourquoi la Terre, par exemple, tournait autour du Soleil ou pourquoi la Lune tournait autour de la Terre. Cela n'expliquait pas non plus quantitativement ces mouvements : les périodes de révolution des planètes étaient-elles reliées à d'autres grandeurs ? Y avait-il dans cette merveilleuse mécanique céleste des lois précises ? C'est ce que nous allons découvrir ensemble dans ce troisième petit cours élémentaire.

Comme nous l'avions dit dans notre introduction générale, nous ne ferons pas de calculs compliqués, mais juste un peu d'arithmétique. Nous rappellerons les deux ou trois connaissances nécessaires dans des encadrés. Nous espérons ainsi que les personnes les plus réfractaires aux mathématiques pourront néanmoins suivre ces calculs et découvrir ainsi, au détour d'une explication, la magie de la compréhension quantitative.

Les données d'observation

Il est très difficile de suivre chronologiquement l'évolution des idées, car à un même instant cohabitent des idées qui ne résisteront pas au couteau de l'expérience et celles qui s'imposeront comme "justes". Ainsi, pour l'histoire qui nous occupe, la chose est assez flagrante. Kepler (1571-1630), à la suite de Copernic (1473-1543) et grâce aux excellentes mesures de son maître Tycho Brahé, avait élaboré ses trois lois expérimentales, que nous allons étudier. Et pourtant, trois ans après la mort de Kepler dont les lois auraient dû prouver la justesse du système héliocentrique, Galilée (1564-1642), le père de la physique, ce philosophe génial (cf. l'article de P. Lerich ci-après), avait dû renoncer publiquement en 1633 au système héliocentrique. La science progresse rarement en ligne droite !

Kepler élaborera trois lois sur la base des observations : **La première**, selon laquelle les planètes décrivaient des ellipses (et non pas des cercles) dans leur mouvement de révolution ; la distance d'une planète au Soleil variait donc au cours de la révolution. **La deuxième**, la loi des aires, qui établissait que la distance de la planète au Soleil balayait toujours la même surface en des temps égaux et ce pour n'importe quel point de l'orbite ; comme cette distance variait, il s'ensuivait que la vitesse orbitale d'une planète n'était pas constante. Enfin **la troisième loi**, celle qui va nous intéresser plus particulièrement et qui exprime la façon dont la période de révolution, P , est liée à la distance

maximale, R , séparant la planète et le Soleil. Ecrivons cette loi mathématiquement :

$$\frac{R^3}{P^2} = \text{constante}$$

Nous verrons plus tard que ces lois se retrouvent dans le mouvement de l'électron autour du noyau atomique et, mieux, nous comprendrons pourquoi. Mais n'anticipons pas sur la physique atomique.

Pour aller plus loin, en toute simplicité, nous supposons que les trajectoires des planètes sont des cercles au lieu d'ellipses. Sans cela, il aurait fallu des développements mathématiques plus fastidieux. De ce fait, nous ne considérerons pas les deux premières lois de Kepler, qui justement posent que les trajectoires ne sont pas des cercles. Rassurez-vous cependant. L'écart à la circularité est très faible.

Et Newton vint...

Newton a compris un peu plus de choses que Galilée, mais il était conscient d'avoir vu plus loin pour être "monté sur les épaules de géants".

Après Galilée, il savait qu'une force n'était pas nécessaire pour entretenir le mouvement, mais qu'elle modifiait le mouvement. Plus précisément, une force fait changer la vitesse. En physique, un changement de vitesse s'appelle une accélération. Si la force s'exerce dans le même sens que la vitesse, la vitesse augmente; si elle s'exerce dans une direction opposée, la vitesse diminue (on parle encore d'accélération, mais négative). Newton a donc écrit sa loi sous la forme suivante:

$$F = M.a$$

F est la force¹, a est l'accélération (c'est-à-dire le changement de vitesse pendant un intervalle de temps donné), M est une constante de proportionnalité qu'on appelle la masse. On sait d'expérience que plus un corps est "lourd" plus l'effort doit être grand pour le mettre en mouvement. Donc M sera sans doute proportionnel au poids. En fait, le poids P peut être vu comme une force attirant un corps vers la Terre. La même loi s'écrit ainsi:

$$P = M.g$$

¹ On comprend intuitivement ce qu'est une force par l'effort que l'on fait. Une force possède les mêmes caractéristiques qu'un objet mathématique que l'on nomme un vecteur : direction, sens et longueur (ou norme). Les vecteurs seront notés en caractères gras.

Où g est une accélération produite par la Terre. Les forces et les poids se mesurent en une unité qu'on appelle "Newton" (N en abrégé), les masses se mesurent en "kilogramme" (kg en abrégé) et les accélérations se mesurent en mètre par seconde et par seconde, puisqu'elles mesurent combien de mètres par seconde un corps va gagner, ou perdre, par seconde.

D'où vient cette accélération g produite par la Terre? Elle doit résulter d'une force entre le corps considéré et la Terre, puisque nous savons que les accélérations sont produites par des forces. Or ce corps peut être un morceau de la Terre elle-même. Si par la pensée je découpe un morceau de Terre de plus en plus gros pour constituer le corps, il arrivera un moment où le corps attiré sera plus gros que la Terre et toujours de même nature. Va-t-il attirer ce qui reste de la Terre ?



Newton a compris que l'attraction était réciproque. Cette idée lui est soi-disant venue en voyant tomber une pomme. La Terre attirait la pomme, mais la pomme attirait la Terre. Cette réciprocity des attractions a été traduite en termes mathématiques.

$$F_{pT} = -F_{Tp}$$

Cette expression signifie que l'attraction de la Terre sur la pomme est de même direction, de même norme que l'attraction de la pomme sur la Terre mais de sens opposé. Mais comment s'exprime cette force ?

La mesure de cette force (ce qu'on appelle la norme de la force) est:

$$F_{pT} = G \frac{M_T M_p}{d^2}$$

G est une constante de proportionnalité et d la distance qui sépare les deux corps qui s'attirent. Si vous avez lu le Cahier Clairaut précédent (CC105), vous savez qu'il est possible de mesurer G avec la balance de

Cavendish. La valeur de G n'était pas connue à l'époque de Newton. On peut se demander d'ailleurs, pourquoi Newton n'a pas réalisé cette expérience lui-même. La raison tient sans doute au fait que la balance de torsion n'était pas encore inventée. C'est Coulomb qui imagina cet instrument d'une sensibilité extrême et surtout exempt de frottement. Il n'avait pas non plus de cassette "audio" pour constituer le ruban de suspension comme nous l'avons fait.

Cette loi n'a pas été démontrée par Newton. Il l'a proposée et, comme les conséquences qu'il en a tirées s'accordaient avec les observations, la loi s'est trouvée vérifiée. Les astronomes comme Clairaut ont parfois douté de la justesse de cette loi. Mais finalement, la loi s'est révélée juste du moins jusqu'à l'avènement de la théorie de la Relativité Générale dont nous reparlerons en temps voulu.

Envisageons le cas où la force s'applique au corps dans une direction perpendiculaire à sa vitesse. La vitesse ne changera pas de valeur (de module) mais elle changera d'orientation. Pour l'instant nous avons presque ce qu'il nous faut pour interpréter les mouvements.

Force transversale

Nous allons donner une relation très utile, qui va nous permettre de retrouver de manière simple la troisième loi de Kepler. Cette relation exprime, de manière générale, l'accélération que subit une masse en mouvement sous l'effet d'une force transversale (perpendiculaire à la direction de sa vitesse). L'expression de cette accélération est : $a=V^2/R$. La démonstration simplifiée est donnée l'encadré ci-dessous.

Si cette accélération est produite par une masse M , qui agit sur m par une force de Newton $F=GMm/R^2$, que va-t-il se passer ? Cette force va produire sur m une accélération GM/R^2 , donc $GM/R^2 = V^2/R$, soit en simplifiant :

$$GM/R = V^2.$$

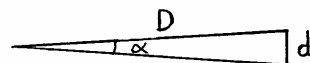
Si V est constant, R sera constant puisque G et M le sont. La masse m continuera perpétuellement à tourner autour de M , comme la Terre autour du Soleil, comme la Lune autour de la Terre.

Encore un petit effort et nous y sommes ! Si la masse m tourne autour de M à la vitesse V , le temps pour faire un tour, ce qu'on appelle la période de révolution P , est simplement $P=2\pi R/V$. On tire de là que $V^2=4\pi^2 R^2/P^2$, qui, reporté dans notre précédente relation, donne:

$$\frac{R^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Encadré 1 : Accélération produite par une force transversale modifiant la direction d'un corps en mouvement

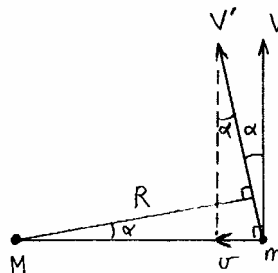
Nous allons appliquer une relation déjà signalée comme importante dans le cours précédent : $d/D=\alpha$ (en radians) si α est petit.



Imaginons un corps de masse m se déplaçant à la vitesse V en ligne droite. Faisons agir sur ce corps une force perpendiculaire à la direction de sa vitesse. La vitesse initiale va changer de direction pour devenir V' . Une petite composante v va donc apparaître, dirigée vers le centre M , point de concours des perpendiculaires aux directions de V et V' . L'accélération prise par m en direction de M est, par définition de l'accélération : $a=v/t$, t étant le temps supposé très court, pendant lequel l'action a lieu. En considérant le graphique ci-dessous, on voit que $v/V=\alpha$, c'est-à-dire $\alpha=v t/V$. Mais m se sera déplacé d'une longueur $V t$ sur un arc de rayon R . Donc $\alpha=V t/R$. En égalisant les deux expressions de α on trouve l'accélération cherchée :

$$a=V^2/R.$$

Notons que t peut être choisi aussi petit que l'on veut pour que l'approximation soit correcte, puisqu'il n'intervient pas.



C'est bien la troisième loi de Kepler. Newton est ainsi parvenu, non seulement à retrouver la loi, mais à préciser l'expression de la constante : $GM/4\pi^2$. Certes Newton ne connaissait pas encore la valeur numérique de G comme nous l'avons dit plus haut, mais il venait de comprendre que cette constante faisait intervenir la masse du corps attirant (masse du Soleil quand on considère les planètes, ou masse de la Terre quand on considère la Lune).

Nous n'avons pas pris en compte le fait que les trajectoires sont des ellipses et que la vitesse le long de ces trajectoires n'est pas rigoureusement constante. Nous verrons dans le prochain cours que les conséquences pratiques sont pourtant sensibles.

■