DOCUMENTS ANCIENS

De Broglie et la nouvelle mécanique ondulatoire

G. Paturel, Observatoire de Lyon

Pour continuer avec l'évocation des grandes démonstrations qui ont contribuées à modifier la physique, nous reproduisons la démonstration originale de la relation qui établit l'équivalence entre une onde et une masse en mouvement.

Cette relation, découverte par Louis de Broglie, reçut une magnifique vérification expérimentale avec l'étude de la diffraction d'un faisceau d'électrons monocinétiques par un cristal de nickel, étude faite par MM. Davidson et Germer en 1927. Un faisceau d'électrons monocinétiques se comporte donc bien comme une onde !

La démonstration que nous reproduisons est tirée d'un mémoire publié en 1943 chez Gauthier-Villars. Elle utilise justement la transformation de Lorentz dont nous parlions dans le CC109. Ce qui m'a frappé, c'est l'introduction d'idées neuves sans autre justification qu'une puissante intuition : "*...nous devons maintenant chercher à introduire un élément périodique ...sous la forme d'une onde stationnaire"*. C'est aussi l'utilisation d'images très "einsteiniennes" : "*... en imaginant une infinité de petites horloges disposées en tous les points du système propre du corpuscule.*"

Ce mémoire présente, outre la démonstration reproduite, une remarquable présentation de la mécanique ondulatoire, preuve qu'il est parfois judicieux de lire directement les textes originaux.

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

PARTICULES A SPIN

CHAPITRE I.

IDÉES ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. **Point de départ de la Mécanique ondulatoire.** — L'idée qui a servi de point de départ à la Mécanique ondulatoire a été la suivante : puisque, pour la lumière, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire reliés entre eux par la relation : énergie $= h \times$ fréquence où figure la constante h des quanta de Planck, il est naturel de supposer que, pour la matière aussi, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire, ce dernier longtemps méconnu. Ces deux aspects doivent être reliés par des relations générales où figure la constante de Planck et doivent contenir comme cas particuliers les relations applicables à la lumière.

Pour développer cette idée, il faut chercher à associer un élément périodique au concept de corpuscule. Imaginons un corpuscule qui se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme dans une certaine direction en l'absence de tout champ. Nous fixerons uniquement notre attention sur *l'état de mouvement* du corpuscule, abstraction faite de sa position dans l'espace. Ce mouvement s'effectue dans une certaine direction que nous prendrons comme axe des z et il est défini par les deux grandeurs « énergie » et « quantité de mouvement » dont les expressions relativistes en fonction de la masse propre m_0 du corpuscule et de sa vitesse $v = \beta c$ sont données par les formules (1)

$$\text{(1)} \qquad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(1) c désigne, suivant l'usage, la vitesse de la lumière dans le vide.

dont on tire la relation

$$|\vec{p}| = p = \frac{W v}{c^2}. \tag{2}$$

L'état de mouvement se trouve ainsi défini pour un certain observateur A lié à un certain système de référence galiléen, observateur qui emploie un temps t et des coordonnées rectangulaires x, y, z.

Soit maintenant un autre observateur B qui possède par rapport à A la vitesse $\vec{v}$ dans la direction Oz, autrement dit un observateur lié au corpuscule. Nous pouvons supposer que B a choisi un axe $O_0 z_0$ qui glisse sur l'axe Oz et des axes $O_0 x_0$ et $O_0 y_0$ respectivement parallèles à Ox et Oy. Cela étant, les coordonnées $x_0 y_0 z_0 t_0$ employées par B sont reliées aux coordonnées $xyzt$ de A par les formules bien connues de la transformation de Lorentz

$$x_0 = x, \qquad y_0 = y, \qquad z_0 = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_0 = \frac{t - \frac{\beta}{c} z}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3}$$

Or, pour l'observateur B, la vitesse du corpuscule est nulle; il pose donc comme valeurs de l'énergie et de la quantité de mouvement

$$W_0 = m_0 c^2, \qquad \vec{p_0} = 0. \tag{4}$$

Suivant notre idée de base, nous devons maintenant chercher à introduire un élément périodique et nous tenterons de définir cet élément dans le système propre du corpuscule, c'est-à-dire dans le système de l'observateur B. Comme dans ce système tout est au repos, il est naturel d'y définir l'élément périodique souhaité sous la forme d'une onde stationnaire. Pour cela, nous définirons l'élément périodique par la grandeur supposée scalaire

$$\Psi_0 = A\, e^{2\pi i \nu_0 t_0} \tag{5}$$

qui a la forme de la représentation complexe d'une onde stationnaire. Ψ_0 oscille en fonction du temps propre avec une fréquence ν_0 caractéristique de la nature du corpuscule envisagé. Nous admettrons que A est une constante (en général complexe), de sorte que Ψ_0 ait la même valeur en tout point du système propre de l'observateur B à l'instant t_0.

Nous pouvons nous représenter la répartition des valeurs de Ψ_0 en imaginant une infinité de petites horloges disposées en tous les points du système propre du corpuscule, synchronisées entre elles et possédant une période $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$. Si l'aiguille de l'horloge a pour longueur A, Ψ_0 est en somme l'affixe de l'extrémité de l'aiguille dans le plan du cadran, si l'on considère ce plan comme celui d'une variable complexe ayant son origine au centre du cadran.

Quelle valeur convient-il de donner à la fréquence propre ν_0? Nous devons évidemment chercher à la définir à partir d'une grandeur non nulle qui caractérise le corpuscule dans le système propre B et nous n'avons à notre disposition comme telle grandeur que l'énergie W_0. Étant donné le rôle joué par la constante des quanta h dans toutes les théories quantiques, il est naturel de poser la relation

$$\nu_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{m_0 c^2}{h}, \tag{6}$$

analogue à la relation d'Einstein pour les photons.

Comment va se manifester pour l'observateur A l'élément périodique que nous venons ainsi de définir entièrement pour l'observateur B ? En supposant, ce qui est naturel ici, que l'élément Ψ est un invariant, il suffira pour obtenir son expression pour A de substituer dans son expression pour B la valeur de t_0 fournie par la 4[e] équation (3) de Lorentz, ce qui donnera

$$\Psi(x, y, z, t) = A e^{2\pi i\nu\left(t - \frac{z}{V}\right)} \tag{7}$$

si l'on pose

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}. \tag{8}$$

Ainsi, pour l'observateur A, les phases de l'élément périodique introduit sont réparties comme les phases d'une onde plane monochromatique dont la fréquence ν et la vitesse de propagation de la phase V ont les valeurs (8).

En comparant les formules (1), (4), (6) et (8), on trouve

$$W = h\nu, \tag{9}$$

et cette relation sera évidemment valable dans tous les systèmes galiléens puisque rien ne distingue l'observateur A d'un autre observateur galiléen. De plus, en définissant comme d'habitude la longueur d'onde de l'onde Ψ, on trouve pour cette longueur d'onde la valeur

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{c^2}{v}\,\frac{h}{W} = \frac{h}{p}, \tag{10}$$

formule fondamentale qui pour les faibles vitesses se réduit à

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \tag{11}$$

et qui a été vérifiée avec une grande précision par les expériences de diffraction des électrons par les cristaux.

Pour une particule de vitesse égale à c ou indiscernable de c, on a

$$v = V = c, \qquad W = h\nu, \qquad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}. \tag{12}$$

On retrouve bien ainsi les formules fondamentales de la théorie des quanta de lumière applicables aux photons.

Nous pouvons maintenant écrire la grandeur Ψ vue par l'observateur A sous la forme

$$\Psi = A e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)}, \tag{13}$$

ou, plus généralement, si l'on n'a pas pris la direction de propagation comme axe des z :

$$\Psi(x, y, z; t) = A e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)} = A e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - \vec{p}.\vec{r})}. \tag{14}$$

Cette formule nous montre que la *phase* de l'onde Ψ coïncide, au facteur $\frac{2\pi}{h}$ près, avec l'Action hamiltonienne du corpuscule. En constatant cette proportionnalité entre l'action du corpuscule et la phase de l'onde Ψ qui lui est associée, on aperçoit que le principe d'action stationnaire valable pour la Dynamique du corpuscule doit n'être qu'une traduction du principe de Fermat valable pour l'onde associée. Mais la théorie ondulatoire nous apprend que le principe de Fermat est valable seulement dans le domaine où l'Optique géométrique est utilisable et perd sa valeur dans le domaine de l'Optique physique proprement ondulatoire. On parvient ainsi à l'idée fondamentale que l'ancienne Mécanique (aussi bien sous sa forme relativiste que sous sa forme newtonienne classique) n'est qu'une approximation ayant le même caractère de validité que l'optique géométrique. Dès lors, on est amené à concevoir la nécessité de construire une nouvelle Mécanique, une Mécanique ondulatoire, qui serait à la Mécanique ancienne ce qu'est l'Optique ondulatoire à l'Optique géométrique. C'est cette idée dont nous allons voir le développement.