

# HISTOIRE

## Histoire du périégée lunaire

Pierre Lerich

**Résumé :** *Le mouvement du périégée lunaire a été, pendant un demi-siècle, le pire casse-tête de l'astronomie. Newton lui-même déclarait que ce problème lui donnait des migraines et qu'il ne voulait plus s'en occuper ; mais il n'a jamais cessé d'y réfléchir et semble être arrivé très près de la solution. Les efforts des plus grands mathématiciens du XVIIIème siècle (Clairaut, d'Alembert, Euler) ont fini par triompher de ce défi astronomique.*

D'un périégée au suivant, la Lune peut accomplir beaucoup plus ou beaucoup moins qu'une révolution. Par exemple, elle peut parcourir  $370^\circ$  ou  $350^\circ$ . La succession des périégées est si capricieuse qu'il est impossible, sur une demi-douzaine de périégées observés, de mettre en évidence une quelconque régularité. La tentation est grande de considérer cette succession comme aléatoire. Pourtant, au bout de vingt ou trente lunaisons, un mouvement moyen apparaît : environ  $363^\circ$  entre un périégée et le suivant, mais les écarts, autour de cette moyenne sont considérables. Le problème de Newton n'était pas de trouver ce mouvement moyen, qui était connu depuis longtemps par l'observation sur une longue durée (au périégée, le diamètre apparent est maximum), mais d'expliquer ce mouvement par la gravitation, comme il l'avait fait pour plusieurs autres mouvements célestes (mouvement rétrograde de la ligne des nœuds, variation lunaire, précession des équinoxes, etc...).

Une section entière des PRINCIPIA est consacrée à ce problème : comment une petite variation de l'exposant  $-2$  de la gravitation entraîne nécessairement une avance ou un retard du périégée et inversement, un mouvement quelconque du périégée prouve que l'attraction subie n'est pas strictement proportionnelle à l'inverse du carré de la distance. Une petite force «étrangère» doit nécessairement s'ajouter à la force principale ou s'en retrancher et perturber le système. Dans le cas du système Terre-Lune, le Soleil diminue la « pesanteur » de la Lune vers la Terre d'une petite fraction ( $1/357$  en moyenne), ce qui doit nécessairement entraîner une avance du périégée. La

Lune est un peu «paresseuse» pour revenir à sa distance initiale de la Terre, il lui faut donc un peu plus d'une révolution. Newton applique donc sa méthode à la Lune et trouve une avance du périégée d'environ  $1,5^\circ$  à chaque révolution, au lieu des  $3^\circ$  qu'il espérait trouver. Pourtant, la méthode est convaincante. Le lecteur moderne, après avoir suivi pas à pas tout le raisonnement sans trouver aucun point douteux ou obscur et après avoir refait le calcul final qui est très simple, trouve le même résultat, environ la moitié de ce qu'il faudrait trouver. Ce résultat n'est pas non plus complètement faux, car il est du même ordre de grandeur (la moitié, ce n'est pas si mal) et il est dans le bon sens. Un mouvement rétrograde aurait été beaucoup plus décourageant. Il va de soi que Newton n'était pas satisfait : il a continué de travailler la question de temps en temps, parmi beaucoup d'autres occupations.

Comment se peut-il qu'un raisonnement sérieux donne un résultat faux, alors que Newton avait résolu de façon satisfaisante d'autres problèmes tout aussi difficiles (par exemple, le mouvement rétrograde des nœuds) ?

Il y avait là un grand mystère, le périégée lunaire apparaissant comme un cas particulier réfractaire aux méthodes habituelles. La Loi du carré inverse fut même suspectée : elle comportait peut être certaines exceptions ? Peut être fallait-il, dans le cas de la Lune, ajouter à la loi ordinaire une petite quantité inversement proportionnelle au cube de la distance ? Cette proposition de Clairaut permettait d'obtenir un résultat satisfaisant, conforme aux observations. On conservait la méthode de Newton,

mais on modifiait l'exposant de la gravitation. Cela ressemblait un peu à une manipulation. Clairaut lui-même avait des doutes et continuait de chercher dans une toute autre direction. C'était l'époque (1<sup>ère</sup> moitié du XVIII<sup>ème</sup> siècle) de l'explosion du calcul différentiel et intégral, à laquelle Newton avait puissamment contribué, tout en affichant sa préférence pour les méthodes géométriques. Plutôt que raisonner sur une figure, on pouvait aussi poser une équation rassemblant les forces, les masses et les positions des astres à un instant donné et calculer l'évolution ultérieure du système. C'est en rejetant la géométrie et en perfectionnant le calcul que Clairaut et d'Alembert obtinrent des résultats assez satisfaisants. L'idée était d'ailleurs dans l'air du temps. La géométrie c'était le passé, le calcul c'était l'avenir. Cependant, Newton n'avait pas tort non plus quand il disait qu'avec la géométrie, on ne perd jamais de vue l'objet dont on s'occupe, alors que le calcul se développe selon ses propres règles, efficaces mais peu attrayantes selon lui.

Il reste à comprendre pourquoi le calcul a réussi là où la géométrie avait échoué. Dans beaucoup de problèmes astronomiques, une certaine cause produit un certain effet, lequel à son tour modifie quelque peu la cause. Cette cause modifiée produit un effet supplémentaire (on parle alors d'un effet « du second ordre ») qui, de nouveau, modifie encore un peu la cause et cet échange entre la cause et l'effet se poursuit à l'infini, les termes ajoutés étant de plus en plus petits. Selon la précision désirée, on ajoute plus ou moins de termes à ce développement. Dans le cas du périhélie lunaire, l'avance du périhélie dépend de la distance angulaire entre le Soleil et ce périhélie. Quand le Soleil traverse la ligne des apsides, le périhélie avance rapidement ( $0,3^\circ$  par jour environ) et tend à suivre le Soleil comme s'il essayait vainement de le rattraper. Cette avance rapide dans le même sens tend à prolonger la cause de cette rapidité. Inversement, quand le Soleil passe par la perpendiculaire à la ligne des apsides, environ trois mois plus tard, le périhélie rétrograde d'environ  $0,2^\circ$  par jour comme s'il essayait de fuir le Soleil, et ce mouvement rétrograde tend à abrégier la cause de cette rétrogradation. Ce rapport complexe entre le Soleil et le périhélie lunaire est entièrement contenu dans l'équation différentielle qui définit le mouvement. Il faut résoudre cette équation (l'intégrer) pour connaître le déplacement total du périhélie au bout d'un temps donné. En considérant seulement la diminution moyenne de l'attraction terrestre sur la Lune, Newton simplifiait beaucoup le problème puisqu'il supposait un mouvement régulier du périhélie, alors que ce mouvement est

alternativement direct et rétrograde avec des vitesses différentes pendant des temps différents et, finalement, une prédominance du mouvement direct. Newton avait parfaitement compris tout cela, comme on peut le constater dans la magistrale section XI des PRINCIPIA. Mais quelle figure géométrique serait capable de traduire ce mouvement alternativement direct et rétrograde ? Par quelle construction pourrait-on tirer de cette figure un mouvement moyen ? Newton a, sans doute, espéré que la force moyenne donnerait un déplacement moyen du périhélie plus ou moins conforme aux observations. Mais, dans ce cas précis, cette moyenne « élémentaire » n'a que peu de rapport avec la vraie moyenne résultant du mouvement alterné. Celle-ci n'a rien d'intuitif ni de prévisible a priori, elle résulte d'un calcul difficile et très long si l'on désire un résultat précis. La géométrie ne permettait pas d'explorer toute la complexité du problème. La méthode de Newton était trop simple, réduite à une cause et un effet, comme s'il n'y avait pas de rétroaction de l'effet sur la cause. Or, c'est justement dans le cas du périhélie lunaire que cette rétroaction est la plus forte, responsable de la moitié environ du mouvement total. D'où le résultat peu satisfaisant trouvé par Newton : la moitié du mouvement réel.

Cependant, dans les papiers et brouillons rassemblés après la mort de Newton, on a trouvé une équation différentielle qui permettait d'approcher à 10 % près la solution du problème, cette fois par le calcul et non plus par la géométrie. Si Newton avait vécu encore quelques années de plus (il est mort à 85 ans) il aurait peut-être développé cette nouvelle méthode pour l'introduire dans les PRINCIPIA qu'il avait l'habitude de corriger et de modifier d'une édition à l'autre. Mais il a fallu encore un siècle, même après les progrès décisifs apportés par Clairaut et d'Alembert, pour obtenir un mouvement moyen du périhélie vraiment satisfaisant et conforme aux observations.

La géométrie est tout de même bien utile pour visualiser les résultats du calcul. On trouve ainsi, dans l'Astronomie Générale de DANJON (Ed. Blanchard, réimp. 1986), une excellente représentation graphique du mouvement du périhélie lunaire due à Euler, contemporain de Clairaut et de d'Alembert, qui a représenté sur la même figure le mouvement du périhélie et la variation de l'excentricité qui en est inséparable. Cette figure, qui rappelle un peu les épicycles de l'antiquité, montre très bien le mouvement alterné du périhélie et son avance moyenne, mais elle ne pouvait être tracée que grâce aux résultats donnés par le calcul. Euler n'a pas cherché à situer ce phénomène par

rapport au Soleil. Si on veut visualiser le mouvement du périhélie par rapport au Soleil, on peut imaginer ce petit scénario. Supposons l'orbite lunaire immobile dans l'espace, le Soleil tournant autour d'elle en un an. La règle est simple : le Soleil repousse le grand axe et attire le petit axe. Considérons le Soleil  $45^\circ$  (ou 45 jours environ) avant son passage devant le périhélie. Celui-ci, d'abord immobile, commence à avancer, repoussé par le Soleil. Comme il se met en mouvement assez lentement, le Soleil le rattrape et dès qu'il le dépasse, il commence à le freiner en continuant de le repousser, cette fois vers l'arrière jusqu'à l'immobiliser. Ayant alors dépassé le périhélie de  $45^\circ$ , le Soleil commence à attirer le petit axe et l'ellipse se remet en mouvement, mais cette fois dans le sens rétrograde. Le Soleil passe en face du petit axe et freine son mouvement rétrograde puisqu'il l'attire toujours. Au moment où le petit axe s'arrête, le Soleil commence à repousser l'autre

extrémité du grand axe (l'apogée). L'ellipse repart dans le sens direct et tout le processus recommence indéfiniment.

On peut aussi, en utilisant une éphéméride, visualiser les longitudes des périhélie successifs en les portant sur un graphe (longitudes en ordonnée, temps en abscisse ou simplement révolutions lunaires prises comme unités de temps). Les périhélie successifs dessinent une courbe en dents de scie dont les segments montants sont plus longs que les segments descendants. L'ensemble de la courbe monte donc lentement et on retrouve ainsi l'avance moyenne du périhélie de  $3^\circ$  environ par révolution. Cinq ou six périhélie donnaient l'impression d'une succession aléatoire. Il en faut une vingtaine (soit environ 18 mois) pour visualiser trois périodes de la courbe (trois dents de la scie) et apprécier la belle régularité du phénomène. ■

### **Au fil des perles des enseignants et des astronomes**

L'éclipse du 3 octobre dernier nous a fourni quelques perles. La première avait été imaginée comme une fiction dans le dessin que nous vous présentons à la page 9. Mais, Eric Josselin nous a appris, lors de l'Assemblée Générale de Rouen, que cette fiction avait été bien réelle. Un élève lui avait effectivement demandé s'il pourrait regarder le Soleil quand l'éclipse serait finie. La réalité égale la fiction !

Une autre perle, sur le même sujet, nous a été rapportée par Liliane Vilas, également lors de l'AG. Liliane voulait intervenir dans une classe, le matin de l'éclipse, pour montrer le phénomène aux enfants. Elle en a parlé à l'institutrice de la classe qui lui a répondu : "Ce lundi matin nous sommes très occupés. Pourriez vous venir plutôt l'après-midi".

Cette réflexion est à rapprocher de celle d'une courtisane de la cour de Louis XIV, qui, ayant manqué l'observation d'une éclipse avait déclaré à ses amies : "je connais bien l'astronome, il nous la montrera".

### **Quelques bonnes nouvelles pour 2006**

Lors de l'Assemblée Générale de Rouen, il a été décidé de **baisser les prix** des anciens numéros des Cahiers Clairaut (voir page 36). Les diapositives seront aussi assez largement distribuées car nous sommes en train de passer aux images numériques (toute la collection des diapositives a été numérisée).

**Avec l'abonnement 2006 vous recevrez le CDROM des archives des Cahiers Clairaut. Plus de 100 numéros sur un seul CD !** Vous pourrez y retrouver les premiers articles dans leur format original.

Les prochains Cahiers Clairaut devraient être **publiés en couleur**. Nous pourrions ainsi publier des photos en couleurs et rendre textes et graphiques plus lisibles.

Pour faciliter la tâche de notre nouveau trésorier, nous vous demandons de renouveler votre abonnement avant l'équinoxe de printemps (mars). Vous bénéficierez alors d'**un abonnement à prix réduit**.