

## Le puits et le pendule

Pierre Lerich

**Résumé :** *L'idée de creuser un puits à travers la Terre remonte aussi loin que le Moyen-Âge (14<sup>e</sup> siècle). Contrairement au rêve de voler dans les airs, l'idée du puits n'a jamais reçu le moindre début d'application mais elle est restée un sujet de réflexion et un thème d'exercice sur les équations différentielles.*

Au départ, l'idée résultait logiquement de la forme sphérique de la Terre, admise dès l'Antiquité. C'était une tentation d'aller aux antipodes par le plus court chemin : ce puits aurait constitué un raccourci et une grande économie, du moins en principe. Une fois l'idée du puits envisagée, l'idée de faire tomber dedans un boulet de canon s'imposait aussi naturellement. A l'époque de Galilée, on admettait que le boulet tomberait jusqu'au centre de la Terre, puis, poursuivant sur son élan, monterait jusqu'aux antipodes, puis reviendrait à son point de départ. Galilée avait justement réalisé diverses expériences sur des plans inclinés d'où il ressortait que la vitesse acquise pendant la descente permettait de remonter exactement à la hauteur initiale, comme un pendule. Ce boulet dans le puits était donc une sorte de pendule.

Galilée a repris ce thème sans le développer, mais dans une intention particulière. La division admise depuis Aristote entre mouvements naturels (chute libre) et mouvements violents (objet lancé verticalement), bien loin d'être une division fondamentale et universelle, n'était pour Galilée qu'une illusion. En effet, le boulet de canon tombe dans le puits (mouvement naturel) puis remonte de l'autre côté (mouvement violent). Ces deux mouvements sont aussi naturels l'un que l'autre puisque le second s'explique entièrement par le premier. Il n'y a donc qu'un mouvement, d'abord accéléré, puis décéléré. Le puits et le pendule n'apparaissent donc chez Galilée que dans une intention polémique. Il n'a pas essayé de calculer la période de ce mouvement : en combien de temps le boulet de canon reviendrait-il à son point de départ ?

Newton n'a jamais parlé de puits ni de boulet de canon, mais il a apporté tous les éléments de réponse au problème. La première question qui se

pose est : quelle est la force de la gravitation à l'intérieur de la Terre ? Newton démontre que celle-ci est directement proportionnelle à la distance au centre de la Terre. Le « voyageur » arrivé à mi-distance entre la surface et le centre ne pèse plus que la moitié de son poids habituel. Au centre, il ne pèse plus rien. Jules Verne n'a pas du tout pensé à cela dans son décevant *Voyage au centre de la Terre*. Deuxième question : Quelle sera la trajectoire d'un corps attiré par un point proportionnellement à la distance (attraction plus forte à grande distance) ? Réponse de Newton : une ellipse, mais différente de l'ellipse de Kepler : ici, le point attracteur occupe le centre de l'ellipse et non son foyer. Cette ellipse est donc symétrique par rapport au point attracteur. Elle peut éventuellement dégénérer en un cercle si ses deux axes deviennent égaux, et en une ligne droite si le petit axe diminue jusqu'à disparaître. Le plus étonnant est que toutes ces ellipses, grandes ou petites, larges ou allongées, sont décrites dans le même temps périodique. Cela heurte nos habitudes de pensée, mais il n'y a pas lieu de s'étonner : il s'agit d'une loi de gravitation qui n'existe pas dans notre univers, sinon d'une façon tout à fait théorique, à l'intérieur de la Terre, en supposant qu'elle soit homogène et qu'un corps puisse s'y déplacer librement, sans rencontrer de résistance.

La démonstration de ce fait essentiel est particulièrement admirable. Elle consiste en quelques phrases, sans aucun calcul et sans même une figure. Son importance vient de ce qu'elle permet de calculer les inconnues du problème (position, vitesse, période) sans utiliser le calcul différentiel, qui n'existe pas encore.

Pour cela, il faut faire appel à un troisième passage des *Principia*. Avec un cercle auxiliaire, un sinus et un cosinus, et en fixant les conditions initiales (rayon de la Terre et chemin parcouru

pendant la première seconde de chute), on trouve que le boulet de canon arriverait au centre de la Terre en 21 minutes et ferait sa réapparition à l'entrée du puits au bout d'une heure 24 minutes après avoir brièvement effleuré les antipodes. Sa vitesse maximale serait de 7 644 m/s.

Galilée avait aussi observé que la période des oscillations du pendule était indépendante de leur amplitude. Le pendule s'amortissait peu à peu, mais le temps d'une oscillation restait le même. Cette observation s'appliquait-elle au boulet de canon ? La démonstration de Newton permet de répondre oui sans hésiter (et sans faire de calcul). Si on lâchait le boulet à mi-chemin entre la surface et le centre, il reviendrait à son point de départ en 1 h 24 minutes, le même temps qu'en partant de la surface ; en revanche sa vitesse maximale au centre serait deux fois moindre.

Cette conclusion serait aussi valable si on creusait non pas un puits vertical, mais un tunnel rectiligne entre deux points de la Terre. On démontre facilement que 1 000 km dans un tel tunnel seraient parcourus dans le même temps que les mêmes 1 000 km au milieu du puits passant par le centre de la Terre. Il faudrait alors, remplacer le boulet par un véhicule adapté, muni de parfaits roulements à bille, et parfaitement aérodynamique. Par exemple, un tunnel Lille-Perpignan s'enfoncerait sous la Terre jusqu'à une profondeur de 15 km selon un angle de 4° environ au départ, soit une pente de 7 % produisant une accélération très supportable. Le voyage (aller simple) durerait 42 minutes (2 fois 21 minutes), toujours la même durée quelle que soit la distance, chaque augmentation de la distance étant automatiquement compensée par une augmentation de la pente, donc de la vitesse. On pourrait poursuivre l'analogie avec le pendule en disposant sur le sol une carte de France et en faisant osciller un pendule suspendu au plafond, d'abord entre Lille et Perpignan, puis entre Paris et Clermont-Ferrand. Ces deux « trajets » seront effectués dans le même temps.

L'analogie entre le boulet de canon dans son puits et le pendule au bout de son fil vient de ce que l'un comme l'autre sont attirés proportionnellement à la distance, soit du centre de la Terre pour l'un, soit de la verticale dans le cas du pendule.

Cependant cette analogie est approximative car le pendule décrit un arc de cercle qui n'est pas tout à fait égal à la distance du pendule à la verticale. Cette approximation est suffisante pour les petits angles (moins de 10° par exemple) et d'ailleurs elle est très employée en astronomie pour des calculs rapides.

Toutes ces rêveries sur des voyages gratuits et écologiques, durant toujours 42 minutes, se heurtent à une foule d'objections évidentes, d'ordre géologique et technologique, auxquelles il faut ajouter une objection de principe : dans tout cela on a oublié que la Terre tourne et que tout mouvement rectiligne est affecté d'une déviation latérale due à une force parasite dite « de Coriolis ». Même dans un puits large et parfaitement vertical, le boulet de canon heurterait la paroi du côté est, rebondirait vers le côté ouest, et cela de plus en plus brutalement dès les premières minutes.

Aujourd'hui ces problèmes donnent lieu à des exercices élémentaires de calcul différentiel. L'équation à résoudre s'appelle « l'équation du pendule » et sa solution est si classique qu'elle est souvent donnée sans démonstration. On trouve le puits et le boulet dans des ouvrages du genre « la Physique amusante » ou « récréations mathématiques ».

On les trouve dans la *Physique en questions* de J.M. Lévy-Leblond chez Vuibert (rééd. 1998). Ces ouvrages sont volontiers humoristiques tout en étant très sérieux et utiles. Cette manière de faire de la science était justement celle de Galilée, qui ne perdait jamais une occasion de proposer un exemple un peu surréaliste, par exemple faire cuire un œuf en le faisant tourner avec une fronde (exemples souvent donnés pour ridiculiser l'adversaire). Galilée n'a pas pu résoudre le problème du boulet dans le puits avec les moyens de son temps. Newton a créé tous les outils nécessaires, mais comme il ne riait jamais, il ne les a pas appliqués au boulet dans le puits : il aurait certainement rejeté avec dédain cette idée saugrenue, bien que dans un autre contexte, plus sérieux, il ait lui aussi fait appel à un puits imaginaire pour calculer avec succès l'aplatissement de la Terre. L'idéal serait d'associer l'humour de Galilée et le génie de Newton, mais c'est peut-être beaucoup demander. ■

