Les orbites de la Terre et de Mars la première loi de Kepler

Béatrice Sandré

Résumé : *Kepler admet le modèle héliocentrique de Copernic : les planètes et la Terre tournent autour du Soleil. Mais, comment reconstituer les orbites des planètes autour du Soleil, alors que les observations sont faites depuis la Terre ? C'est le travail que Kepler a réalisé, à partir des mesures de position faites par Tycho Brahé et que nous allons essayer de reproduire.*

Introduction

Vu depuis la Terre, le Soleil décrit un grand cercle sur la sphère céleste, appelé écliptique. Sur cette ligne, à une date donnée, sa position peut être définie par l'angle $\lambda_S = \left(\overrightarrow{TO}, \overrightarrow{TS}\right)$, appelé ***longitude écliptique géocentrique du Soleil*** (T est le centre de la Terre, S celui du Soleil et O une direction origine, constituée par la position de S au moment de l'équinoxe de printemps).

Toujours vue depuis la Terre, la planète Mars se déplace pratiquement sur la même ligne que le Soleil, ce qui signifie que les orbites de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique sont pratiquement dans un même plan. La position de Mars sur l'écliptique est alors repérée par le seul angle $\lambda_M = \left(\overrightarrow{TO}, \overrightarrow{TM}\right)$ appelé longitude écliptique géocentrique de Mars (M est le centre de la planète Mars).

Kepler avait utilisé les mesures de longitudes écliptiques géocentriques du Soleil et de Mars faites par Tycho Brahé.

Nous, nous utiliserons le site de l'IMCCE (Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides), pour relever les longitudes écliptiques géocentriques du Soleil et de Mars, à quelques dates bien choisies.

Le choix des dates : période synodique et période sidérale

L'intervalle de temps entre deux oppositions de Mars (les directions du Soleil et de Mars, vus depuis la Terre, sont opposées) est appelé période synodique de Mars et vaut S_M = 780 jours.

Mais cette période n'étant pas égale à un nombre entier d'année, pendant la durée S_M, Mars n'a pas fait un tour autour du Soleil, mais une fraction α de tour en plus. Pendant ce temps, la Terre n'a pas fait 2 tours autour du Soleil, mais $(2 + \alpha)$ tours. Si on note T_T et T_M les périodes sidérales de la Terre et de Mars (durées d'un tour autour du Soleil), en supposant les mouvements uniformes, on en déduit que :

$$S_M = (1+\alpha)T_M = (2+\alpha)T_T$$

$$\text{d'où} \quad \frac{1}{T_M} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{S_M}$$

Connaissant S_M = 780 jours et T_T = 365,25 jours, on en déduit la période sidérale de Mars :

$$T_M = 687\,\text{jours}$$

A deux dates séparées d'un nombre entier de périodes T_M, la planète Mars occupe la même position dans le référentiel héliocentrique.

La trajectoire de la Terre dans le référentiel héliocentrique

Détermination d'un point de la trajectoire

Le 28 Août 2003, Mars était en opposition avec le Soleil : les centres : S du Soleil, T_o de la Terre et M_o de Mars sont alignés et les longitudes écliptiques géocentriques du Soleil et de Mars diffèrent de 180°.

$$\lambda_{M_o} = 334°58' \quad \text{et} \quad \lambda_{S_o} = 154°58'$$

Une période sidérale, soit 687 jours plus tôt, Mars ***occupait la même position*** $\mathbf{M_o}$ dans le référentiel héliocentrique tandis que la Terre occupait la position T. C'était le 10 Octobre 2001.

D'après l'IMCCE, les longitudes écliptiques géocentriques du Soleil et de Mars à cette date étaient :

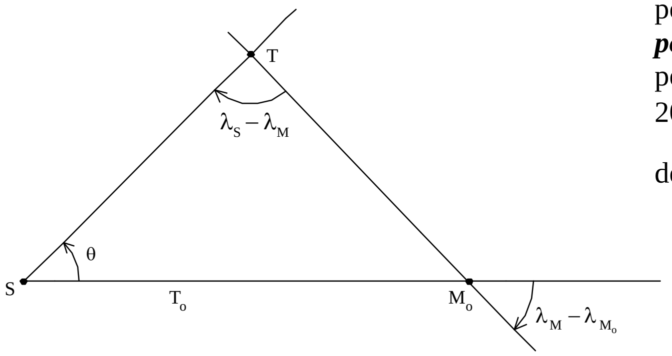
$$\lambda_M = 288°40' \quad \text{et} \quad \lambda_S = 197°27'$$

La distance SM_o étant choisie comme unité de longueur, ces mesures d'angles permettent de construire le triangle SM_oT et donc de placer la Terre le 10 Octobre 2001 dans le référentiel héliocentrique :

$$\left(\overrightarrow{M_oS}, \overrightarrow{M_oT}\right) = \lambda_M - \lambda_{M_o}$$

$$\left(\overrightarrow{TM_o}, \overrightarrow{TS}\right) = \lambda_S - \lambda_M$$

$$\theta = \left(\overrightarrow{SM_o}, \overrightarrow{ST}\right) = \lambda_S - \lambda_{M_o} + 180°$$



Les constructions à la minute d'angle près étant bien difficiles à réaliser, nous calculerons la position de T (en utilisant les relations d'Al Kashi) en coordonnées polaires :

$$r = ST = SM_o \times \frac{\sin\left(\lambda_M - \lambda_{M_o}\right)}{\sin\left(\lambda_S - \lambda_M\right)}$$

$$\theta = \left(\overrightarrow{SM_o}, \overrightarrow{ST}\right) = \lambda_S - \lambda_{M_o} + 180°$$

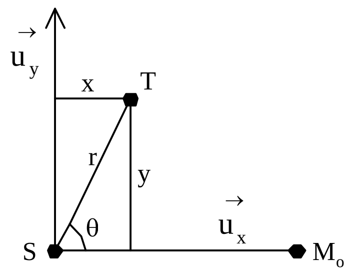
Soit $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$ la base cartésienne dans le plan du mouvement (plan de l'écliptique) telle que $\vec{u}_x = \overrightarrow{SM_o}$. Les coordonnées cartésiennes de la Terre le 10 Octobre 2001 dans cette base sont :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

Il est possible de recommencer ce travail pour d'autres dates séparées du 28 Août 2003 par un nombre entier de périodes sidérales. Le tableau ci-dessous indique les dates utilisées ainsi que les longitudes écliptiques géocentriques du Soleil et de Mars à ces différentes dates, données par l'IMCCE:

date	λ_S	λ_M	**r**
15/05/1992	55°21'	7°44'	0,7324
2/04/1994	12°56'	350°48'	0,7241
18/02/1996	329°29'	332°41'	0,7156
5/01/1998	285°16'	314°34'	0,7122
23/11/1999	241°01'	298°05'	0,7150
10/10/2001	197°27'	288°40'	0,7231
15/07/2005	113°17'	22°22'	0,7362

A toutes ces dates séparées d'un nombre entier de périodes sidérales, ***la planète Mars occupe la même position*** $\mathbf{M_o}$ dans le référentiel héliocentrique. On peut de la même manière que pour le 10 Octobre 2001, calculer les coordonnées (r_i , θ_i) puis (x_i , y_i) de la Terre dans le repère $\left(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$.



La dernière colonne du tableau donne les valeurs des r_i ainsi calculés. Ces valeurs n'étant pas constantes, la trajectoire de la Terre n'est pas un cercle centré sur le Soleil. Nous supposons que c'est une ellipse dont nous allons rechercher les caractéristiques (centre, foyer et excentricité).

L'ellipse des "moindres carrés"

En coordonnées cartésiennes, l'équation générale d'une ellipse peut s'écrire :

$$x^2 = ay^2 + bxy + cx + dy + f$$

où a,b,c,d,f sont les constantes caractérisant l'ellipse et sa position.

A l'aide d'un logiciel de calcul formel (ici, nous utiliserons Mapple), on recherche les valeurs de ces cinq paramètres tels que l'ellipse passe au plus près des sept positions de la Terre précédemment déterminées. C'est l'ellipse des moindres carrés. Le calcul nous fournit les valeurs suivantes :

$$a = -0{,}9996$$
$$b = -0{,}0002594$$
$$c = +0{,}01495$$
$$d = -0{,}01926$$
$$f = +0{,}5242$$

a et b sont des coefficients sans dimension mais c et d sont homogènes à des longueurs et f à une surface. *L'unité de longueur choisie est la distance Soleil – Mars au moment de l'opposition du 28 Août 2003.*

Caractéristiques géométriques de l'orbite de la Terre

Si l'origine S était au centre de l'ellipse, son équation serait de la forme :

$$X^2 = \alpha\, Y^2 + \beta\, XY + \varepsilon$$

afin de satisfaire l'invariance par changement de X en – X et Y en – Y.
Les coefficients c et d n'étant pas nuls, le Soleil n'est pas au centre de l'ellipse et les coordonnées x_C et y_C du centre s'obtiennent en identifiant :

$$x^2 = ay^2 + bxy + cx + dy + f$$
$$(x - x_c)^2 = \alpha(y - y_c)^2 + \beta(x - x_c)(y - y_c) + \varepsilon$$

quelles que soient les valeurs de x et y. On en déduit :

$$\alpha = a$$
$$\beta = b$$
$$x_c = \frac{2ac - bd}{4a + b^2}$$
$$y_c = \frac{bc + 2d}{-b^2 - 4a}$$
$$\varepsilon = f + x_c^2 - ay_c^2 - bx_c y_c$$

Le calcul nous donne :

$$x_c = +0{,}007477$$
$$y_c = -0{,}009635$$
$$\varepsilon = +0{,}5243$$

Si les axes de l'ellipse étaient colinéaires à $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, l'équation de l'ellipse pourrait s'écrire sous la forme :

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

ce qui est impossible ici, le coefficient β étant non nul.
Pour l'écrire sous cette forme, il faudrait amener les axes du repère sur les axes de l'ellipse par une rotation d'un angle φ.
L'identification entre les deux équations de l'ellipse permet de montrer que :

$$a = -\frac{A^2 + B^2 \tan^2\varphi}{B^2 + A^2 \tan^2\varphi}$$
$$b = -\frac{2\tan\varphi(A^2 - B^2)}{B^2 + A^2 \tan^2\varphi}$$
$$\varepsilon = \frac{A^2B^2(1 + \tan^2\varphi)}{B^2 + A^2 \tan^2\varphi}$$

En résolvant ce système d'équations, il est possible de déterminer les constantes A, B et φ en fonction de *a*, *b* et *ε*. A et B sont les longueurs des deux axes de l'ellipse ; *φ* est l'angle formé par ces deux axes avec la base $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$. Le calcul nous donne :

$$A = 0{,}724278$$
$$B = 0{,}724095$$
$$\tan\varphi = -3{,}600$$

Les mesures des deux axes permettent de calculer l'excentricité de l'orbite terrestre :

$$e = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} = 0{,}0224$$

A, grand axe de l'orbite terrestre, est l'unité astronomique ; mais, l'unité de longueur choisie pour exprimer les longueurs des deux axes étant la distance Soleil – Mars au moment de l'opposition du 28 Août 2003, $\frac{1}{A}$ est la distance de Mars au Soleil, en unité astronomique, le 28 Août 2003 :

$$\frac{1}{A} = 1{,}3807$$

La longitude écliptique héliocentrique du grand axe de l'ellipse et donc de son périgée P est :

$$\lambda_P = \varphi + \lambda_{M_o} = 260,5°$$

Or, d'après l'IMCCE,

$$e = 0,0167 \quad ; \quad \frac{1}{A} = 1,38 \quad ; \quad \lambda_P = 283°$$

Les valeurs trouvées pour l'excentricité et la direction du grand axe ne sont pas très bonnes.
En recommençant le travail avec davantage de points de mesure (13 au lieu de 7), les résultats ne sont pas améliorés.
Mais, si l'on suppose que le Soleil est au foyer de l'ellipse, on peut déterminer l'excentricité et la direction du grand axe par une autre méthode. L'origine des coordonnées est toujours en S, C étant le centre de l'ellipse (de coordonnées x_C et y_C) et P l'intersection de la demi-droite CS et de l'ellipse (de coordonnées x_P et y_P).
La droite CS fait avec l'axe des abscisses un angle défini par $\tan\varphi = \frac{y_C}{x_C}$; la longitude écliptique héliocentrique de P est donc $\lambda_P = \varphi + \lambda_{M_o}$
Le calcul donne :

$$\lambda_P = 282,8°$$

Les coordonnées de P sont les solutions du système d'équation :

$$x_P^2 = a y_P^2 + b x_P y_P + c x_P + d y_P + f$$

$$y_P = \frac{y_C}{x_C} x_P$$

L'excentricité de l'orbite de la Terre est :

$$e = \frac{CS}{CP} = \sqrt{\frac{x_C^2 + y_C^2}{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}}$$

Le calcul donne :

$$e = 0,0168$$

Les résultats sont donc nettement meilleurs.
Or, la principale approximation que nous ayons faite, consiste à supposer que les trajectoires de la Terre et de mars sont rigoureusement dans un même plan. Ceci revient à déterminer une projection de la trajectoire de Terre. Or, en projetant une ellipse, on obtient une autre ellipse dont le centre est la projection du centre mais dont le foyer n'est pas la projection du foyer et dont le grand axe n'est pas la projection du grand axe. Cependant, la projection de la droite CSP reste une droite, et sur une droite, les rapports des longueurs sont conservés. C'est sans doute pourquoi la deuxième méthode donne de bien meilleurs résultats.

La trajectoire de Mars dans le référentiel héliocentrique

Détermination d'un point de la trajectoire

Soit T_1 et T_2 les positions de la Terre dans le référentiel héliocentrique à deux dates séparées par une période sidérale de Mars soit 687 jours : le 1er Janvier 2003 et le 18 Novembre 2004 par exemple. A ces deux dates, ***Mars occupe la même position inconnue M dans le référentiel héliocentrique*** et on connaît les longitudes écliptiques géocentriques de Mars et du Soleil :

$$\lambda_{S1} = 280°54'$$

$$\lambda_{M1} = 230°3'$$

$$\lambda_{S2} = 236°41'$$

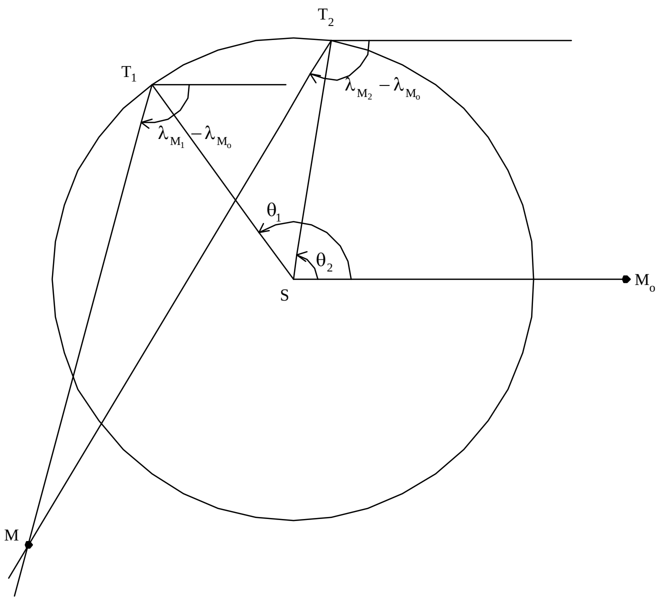
$$\lambda_{M2} = 214°57'$$

Pour chacune des deux dates, il est possible de déterminer la position de la Terre sur son orbite : la droite ST fait avec la droite SM_o un angle $\theta = \left(\overrightarrow{SM_o}, \overrightarrow{ST}\right) = \lambda_S - \lambda_{M_o} + 180°$.

A ces deux dates, la planète Mars occupe la même position M.
Connaissant les angles :

$$\left(\overrightarrow{SM_o}, \overrightarrow{T_1M}\right) = \lambda_{M_1} - \lambda_{M_o} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{SM_o}, \overrightarrow{T_2M}\right) = \lambda_{M_2} - \lambda_{M_o}$$

on construit les droites T_1M et T_2M. Aux deux dates considérées, la planète Mars est à l'intersection de ces deux droites.



écliptique géocentrique de Mars pour déterminer la position de Mars toujours dans ce même référentiel.
La trajectoire de Mars étant supposée elliptique, il est nécessaire de considérer au moins 5 couples de dates ; pour plus de précisions, nous en avons utilisé huit.

M_o est toujours la position de Mars au moment de l'opposition du 28 Août 2003 ;

$\overrightarrow{SM_o} = \vec{u}_x$ est toujours le vecteur unitaire du repère cartésien $\left(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$

Mais les constructions ne sont pas assez précises et nous aurons de nouveau recours au calcul pour déterminer les positions de T_1, T_2 et M.
Les coordonnées de la Terre sont les solutions du système d'équation :

$$y = x\tan\theta$$
$$x^2 = ay^2 + bxy + cx + dy + f$$

Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées de la Terre ainsi déterminées le 1er Janvier 2003 et le 18 Novembre 2004. Les coordonnées de la planète Mars à ces deux dates sont la solution du système d'équation :

$$y = y_1 + (x - x_1)\tan(\lambda_{M_1} - \lambda_{M_o})$$
$$y = y_2 + (x - x_2)\tan(\lambda_{M_2} - \lambda_{M_o})$$

Pour avoir plusieurs points de la trajectoire de Mars, il suffit de recommencer ce travail pour plusieurs couples de dates, chaque couple étant constitué de deux dates séparées par une période sidérale de Mars. Pour chaque date, il est nécessaire de connaître la longitude écliptique géocentrique du Soleil pour déterminer la position de la Terre dans le référentiel héliocentrique et la longitude

dates	λ_S	λ_M	**dates**	λ_S	λ_M
01/01/2003	280°54'	230°02'	18/11/2004	236°40'	214°57'
01/04/2003	11°36'	287°34'	16/02/2005	328°07'	277°01'
01/07/2003	99°29'	335°26'	18/05/2005	57°51'	342°42'
01/10/2003	188°08'	330°12'	18/08/2005	145°51'	41°25'
01/01/2002	281°10'	347°26'	19/11/2003	236°58'	345°29'
01/04/2002	11°50'	51°47'	17/02/2004	328°21'	39°05'
01/07/2002	99°44'	112°20'	18/05/2004	58°03'	97°09'
01/10/2002	188°23'	171°05'	18/08/2004	146°03'	155°13'

Ellipse des « moindres carrés »

Par la même méthode que pour la Terre, on recherche l'équation de l'ellipse passant au plus près de ces huit points. Elle est de la forme :

$$x^2 = a_M y^2 + b_M xy + c_M x + d_M y + f_M$$

et le logiciel de calcul formel nous fournit les valeurs des cinq constantes caractérisant la "meilleure" ellipse :

$$a_M = -1{,}0100$$
$$b_M = -0{,}003108$$
$$c_M = -0{,}2063$$
$$d_M = -0{,}006017$$
$$f_M = +1{,}2065$$

l'unité de longueur étant toujours la distance SM_o.

Caractéristiques géométriques de l'orbite de Mars

L'équation de l'orbite de Mars peut aussi être écrite sous la forme :

$$(x - x_{CM})^2 = a_M (y - y_{CM})^2 + b_M (x - x_{CM})(y - y_{CM}) + \varepsilon_M$$

où x_{CM} et y_{CM} sont les coordonnées cartésiennes du centre de l'ellipse de Mars. Le calcul donne :

$$x_{CM} = -0{,}10316$$
$$y_{CM} = -0{,}002820$$
$$\varepsilon_M = +1{,}2171$$

A_M et B_M les longueurs des axes de l'ellipse et φ_M l'angle formé par ces axes avec le repère $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$ sont les solutions du système d'équations :

$$a_M = -\frac{A_M{}^2 + B_M{}^2 \tan^2 \varphi_M}{B_M{}^2 + A_M{}^2 \tan^2 \varphi_M}$$

$$b_M = -\frac{2 \tan \varphi_M \left(A_M{}^2 - B_M{}^2\right)}{B_M{}^2 + A_M{}^2 \tan^2 \varphi_M}$$

$$\varepsilon_M = \frac{A_M{}^2 B_M{}^2 \left(1 + \tan^2 \varphi_M\right)}{B_M{}^2 + A_M{}^2 \tan^2 \varphi_M}$$

Le calcul donne :

$$A_M = 1{,}10337 \quad ; \quad B_M = 1{,}09764$$

Le grand axe de l'orbite de Mars, mesuré en unité astronomique est donc :

$$\frac{A_M}{A} = \frac{1{,}10337}{0{,}724278} = 1{,}523 \text{ u.a.}$$

En supposant que le Soleil est au foyer de l'ellipse, on détermine la direction du grand axe, identique à celle de la droite C_MS : $\lambda_{PM} = \varphi_M + \lambda_{M_o}$ et

$$\tan \varphi_M = \frac{y_{CM}}{x_{CM}}$$

Le calcul donne : $\lambda_{PM} = 336{,}5°$

Pour déterminer l'excentricité de l'orbite, on détermine la position du périhélie P_M, intersection de la droite C_MS et de l'orbite de Mars. Ses coordonnées x_{PM} et y_{PM} sont donc les solutions du système d'équation :

$$x_{PM}^2 = a_M y_{PM}^2 + b_M x_{PM} y_{PM} + \ldots$$
$$c_M x_{PM} + d_M y_{PM} + f_M$$

$$y_{PM} = \frac{y_{CM}}{x_{CM}} x_{PM}$$

L'excentricité de l'orbite de la Mars est :

$$e_M = \frac{C_M S}{C_M P_M} = \sqrt{\frac{x_{CM}^2 + y_{CM}^2}{(x_{PM} - x_{CM})^2 + (y_{PM} - y_{CM})^2}}$$

Le calcul donne : $e_M = 0{,}0934$

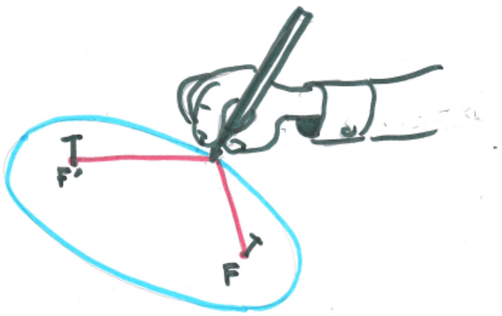
D'après l'IMCCE,

$\frac{A_M}{A} = 1{,}524$ u.a. ; $\lambda_{PM} = 336{,}4°$; $e_M = 0{,}0934$

Les longitudes écliptiques géocentriques du Soleil et de Mars à des dates bien choisies, nous ont permis de reconstituer les trajectoires de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique. Ces trajectoires sont des ellipses ayant le Soleil pour foyer. C'est la première loi de Kepler.

■

Comment tracer une ellipse...



Avec une ficelle....

Avec une scie...

Nous verrons la prochaine fois comment dessiner une ellipse approchée avec une règle et un compas... Cherchez... Ce n'est pas facile !

GP