# COURS

# Trigonométrie sphérique : III Changement de coordonnées

**Georges Paturel, Observatoire de Lyon**

**Résumé :** *Nous avons découvert les bases de la trigonométrie sphérique dans les deux articles précédents. Nous terminons cette série par un sujet important : le changement de coordonnées. Nous l'appliquerons au passage des coordonnées équatoriales aux coordonnées galactiques en vue d'applications ultérieures.*

## Posons le problème

Nous allons résoudre le problème dans sa toute sa généralité. Des simplifications apparaîtront dans certains cas. Représentons les deux systèmes de coordonnées (Figure 1), celui de départ en rouge (P,O,...), et le nouveau système en vert, désigné par des lettres primées : P', O' , etc.. L'angle mesurant la hauteur au-dessus du plan de référence sera représenté par la lettre *b*. L'angle, dans le plan de référence, entre la direction origine et la direction visée sera représenté par la lettre *l*. Les angles seront comptés dans le sens direct. On a donc :

$$l=OH\ ;\ b=EH\ ;\ l'=O'H'\ ;\ b'=EH'$$

Sur la surface de notre sphère céleste, de rayon unité, nous avons un astre E de coordonnées $(l,b)$ dans le premier système (en rouge) et de coordonnées $(l',b')$ dans le second système (en vert). Connaissant $(l,b)$, nous voulons calculer $(l',b')$. Naturellement, sont connues les coordonnées caractéristiques du deuxième système dans le premier, à savoir : $(l_{P'}, b_{P'})$ pour le pôle nord P' et les coordonnées $(l_{O'}, b_{O'})$ pour l'origine O'.

## Résolution générale

Nous devons résoudre le triangle sphérique PP'E en utilisant le groupe de Gauss vu lors du premier cours[1]. Dans ce triangle seuls sont connus : l'angle en P, le côté PP' et le côté PE. Explicitions les angles (les arcs de grands cercles seront surlignés) :

$$\hat{P} = \overline{MH} = \overline{MN} + \overline{NO} + \overline{OH}$$
$$\hat{P} = \pi/2 - \sigma + l$$

[1] Voir le CC117.

La grandeur $\sigma$ se calcule aisément :

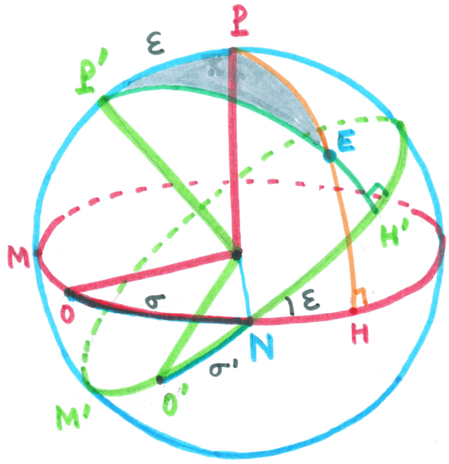


*Figure 1 : Les deux systèmes de coordonnées. En rouge le système de départ, en vert, le nouveau système.*

$$\sigma = \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = l_{P'} + \pi/2$$

de sorte que :

$$\hat{P} = l - l_{P'}$$

De même l'angle en P' vaut :

$$\hat{P}' = \pi - (\pi/2 - \sigma' + l') = \pi/2 + \sigma' - l'$$

Le côté PP' vaut :

$$\varepsilon = \pi/2 - b_{P'}$$

Nous verrons qu'il n'est pas besoin d'expliciter $\sigma'$ qui se déduira automatiquement de l'origine du nouveau système $(l_{O'},b_{O'})$.

Comment calculer $(l',b')$ ? Commençons par calculer $b'$ avec la relation G3 du groupe de Gauss, en l'appliquant au triangle PP'E (Figure 2)[2]. On a :

[2] Pour cette application, il est bon de rappeler que : $\sin(\pi/2 - A) = \cos A$ et $\cos(\pi/2 - A) = \sin A$

$$\boxed{\sin b' = \sin b . \sin b_{P'} + \cos b . \cos b_{P'} \cos(l - l_{P'})}$$

$b'$ étant compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$ on extrait sa valeur directement de celle de son sinus.

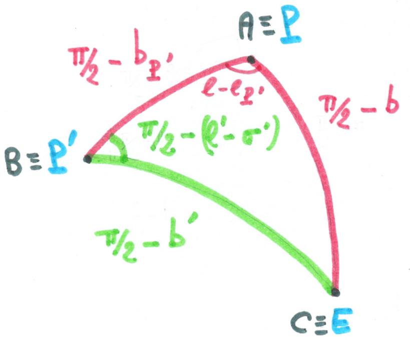


*Figure 2 : Le triangle sphérique à résoudre*

Pour la valeur de $l'$, comprise entre 0 et $2\pi$, c'est un peu plus compliqué. Il nous faut le sinus et le cosinus. Le cosinus se tire de la relation G1 écrite sous sa forme symétrique :
$\sin b / \sin B = \sin c / \sin C$,
et le sinus de la relation G2. On obtient alors :

$$\boxed{\cos(l' - \sigma') = \frac{\cos b . \sin(l - l_{P'})}{\cos b'}}$$

$$\boxed{\sin(l' - \sigma') = \frac{\sin b . \cos b_{P'} - \cos b . \sin b_{P'} . \cos(l - l_{P'})}{\cos b'}}$$

Notons que $\cos b'$ intervient dans les deux expressions. Ce n'est pas gênant puisque nous avons calculé $\sin b'$ auparavant. Nous pouvons ainsi obtenir l'angle $l' - \sigma'$.

Pour avoir $\sigma'$, et donc $l'$, il suffit d'appliquer le calcul précédent à l'origine ($l = l_{O'}$, $b = b_{O'}$), car le résultat doit donner, par définition, $l' = 0$ et $b' = 0$.

## Application concrète

Quelles sont les coordonnées galactiques d'une galaxie de coordonnées équatoriales connues $(\alpha,\delta)$ ?
Toutes les coordonnées $(\alpha,\delta)$ sont à identifier aux coordonnées $(l,b)$ de la section précédente et les coordonnées galactiques cherchées, que nous noterons justement $l', b'$, sont à identifier aux coordonnées $(l', b')$.
Vous pourrez aisément programmer le calcul sur votre tableur. Personnellement je l'ai programmé en un autre langage, mais la procédure est similaire.

L'Union Astronomique Internationale a adopté les valeurs suivantes[3] pour la direction du pôle nord galactique (à identifier à $l_{P'}$ et $b_{P'}$) :
$\alpha_{P'}(1950) = 12h49\,\text{min} = 12{,}8167h = 192{,}25°$
$\delta_{P'}(1950) = 27°24' = 27{,}4°$
et pour l'origine des coordonnées galactiques (à identifier à $l_{O'}$ et $b_{O'}$) :
$\alpha_{O'}(1950) = 17h42{,}4\,\text{min} = 17{,}7067h = 265{,}60°$
$\delta_{O'}(1950) = -28°55' = -28{,}916°$

Quand le programme est écrit, nous calculons une fois pour toutes $\sigma'$, en injectant comme données d'entrée les coordonnées de la nouvelle origine $\alpha_{O'}$ et $\delta_{O'}$. Nous trouvons : $\sin b' = 0{,}00014$ ou $b' = 0{,}008°$ (l'origine des longitudes galactiques est dans le plan galactique, aux erreurs d'arrondis près !) puis :
$\cos(l' - \sigma') = 0{,}8386$ ; $\sin(l' - \sigma') = -0{,}5447$
d'où $l' - \sigma' = 327°$. Comme $l' = 0$ pour l'origine nous tirons $\sigma' = -327 = +33{,}00$, valeur que nous utilisons pour modifier définitivement le programme.

Prenons maintenant un exemple. La galaxie NGC1293 a pour coordonnées (équinoxe 1950) :
$\alpha(1950) = 3h18{,}3\,\text{min} = 3{,}305h = 49{,}575°$
$\delta(1950) = 41°12{,}8' = 41{,}2133°$
Le calcul donne :
$\sin b' = \sin \delta . \sin \delta_{P'} + \cos \delta . \cos \delta_{P'} \cos(\alpha - \alpha_{P'})$
$\sin b' = -0{,}22788$ ou $\boxed{b' = -13{,}17°}$
on calcule au passage :
$\cos b' = \sqrt{1 - \sin^2 b'} = 0{,}97369$
Les deux autres relations nous fournissent :
$\cos(l' - \sigma') = -0{,}46845$ ; $\sin(l' - \sigma') = 0{,}88349$
d'où nous tirons :
$l' - \sigma' = 117{,}93367$ et $l' = 117{,}93 + 33{,}00 = 150{,}93$
$\boxed{l' = 150{,}93°}$.
Telles sont les coordonnées galactiques de la galaxie NGC1293, située dans une direction proche du plan de la Voie Lactée (à seulement 13,17°).

Nous avons vu désormais tout ce qui est essentiel en trigonométrie sphérique. Nous donnerons des applications dans les prochains Cahiers Clairaut. Si vous avez programmé le changement de coordonnées, gardez bien le programme !

■

[3] Toutes les coordonnées équatoriales seront données pour l'équinoxe 1950.