Orbite de la Terre et durée des saisons : I - Astronomie, mathématiques et un peu de programmation dans un tableur

Ph. Merlin, Observatoire de Lyon

Résumé : *Les durées des saisons sont inégales et influent sur l'ensoleillement reçu en différentes saisons. Comment recalculer la durée des saisons à partir des éléments de l'orbite de la Terre ou d'une planète ?*

Connaissant les élément de l'orbite d'une planète, a, e, i, Ω, ϖ, ω, il est possible de retrouver la durée des saisons avec une simple calculette. Mais comme les paramètres des orbites sont variables et vont faire changer les durées et les ensoleillements, l'usage d'un tableur devient très intéressant pour tabuler les calculs et tracer les résultats.

Dans le présent article, nous établirons les quelques formules à utiliser et nous les appliquerons à la Terre actuelle. Dans de prochains articles, nous ferons varier les paramètres de l'orbite de la Terre et nous traiterons le cas de la planète Mars, à extrapoler éventuellement à d'autres planètes.

Dans ce qui suit, nous supposerons en première approximation, que les orbites des planètes sont régies par les lois de Kepler et ne sont donc pas perturbées, sur un intervalle de temps court (par rapport aux ères géologiques).

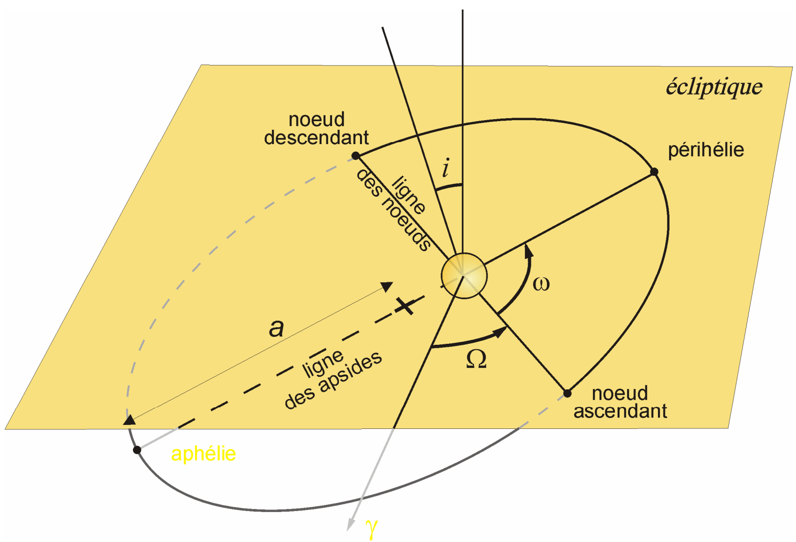
Les éléments caractéristiques de l'orbite d'une planète

Pour connaître à tout instant la position d'une planète par rapport au Soleil, il faut posséder les éléments de l'orbite :

Dans le plan de l'orbite de la planète :

- a demi-grand axe
- e excentricité de l'orbite
- P période sidérale
- t_0 temps du passage au périhélie du plan de l'orbite par rapport à l'écliptique :
- i inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique
- Ω longitude du nœud ascendant
- ω angle nœud ascendant périhélie ou $\varpi=\omega+\Omega$.

Pour la Terre, $\Omega = 0$



Si θ est l'angle entre la direction du périhélie et la planète, la distance au Soleil est

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

Pour connaître r et θ en fonction de t, on utilise deux variables intermédiaires u, l'*anomalie excentrique,* et M, l'*anomalie moyenne*, angle au centre d'une planète fictive qui accomplirait l'orbite à vitesse angulaire constante :

$$M = \frac{2\pi}{P}(t-t_o) = \frac{360}{P}(t-t_o) \qquad (1)$$

Passer de θ à u s'obtient par la relation (voir Annexe 1) :

$$\tan\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

Et entre u et M (u et M en radians) on a (voir Annexe 2) :

$$u - e \sin u = M \qquad (3)$$

Ces équations vont permettre, pour les positions θ des équinoxes et des solstices, d'en calculer les instants.

Positions des équinoxes et des solstices

Pour la Terre, tout est simple, à l'équinoxe de printemps, le Soleil est au point γ et l'on connaît la position du périhélie. On peut calculer l'angle pour l' équinoxe de printemps (EP).

$$\theta_{EP} = 180 - \omega$$

Les autres positions s'en déduisent,

Solstice d'été (SE)

$\theta_{SE} = \theta_{EP} + 90°$ (modulo 360)

Equinoxe d'automne (EA)

$\theta_{EA} = \theta_{SE} + 90°$ (modulo 360) (4)

Solstice d'hiver (EA)

$\theta_{SH} = \theta_{EA} + 90°$ (modulo 360)

A l'aide des formules (1), (2) et (3), on calcule les temps de passages aux différents points par rapport au passage au périhélie et on déduit la durée des saisons.

Pour chaque position, à partir θ_{EP}, θ_{SE}, θ_{EA}, θ_{SH}, on calcule : l'angle u (équation 2), M (équation 3) et les temps t_{EP}, t_{SE}, t_{EA}, t_{SH} (équation 1) qui sont les temps de passage aux quatre positions remarquables.

La durée des saisons se fait par différences. Si celle-ci est négative, on ajoute P (365,25j) pour rendre la valeur positive.

Éléments de l'orbite de la Terre

a = 149 598 034 km	demi grand axe
e = 0,0167	excentricité de l'orbite
P = 365,25 j	période sidérale
ω = 102,9373°	angle nœud ascendant périhélie ou ϖ=ω+Ω.
t_0	temps du passage au périhélie, se calcule (1) avec ω, mais peut être pris à 0.

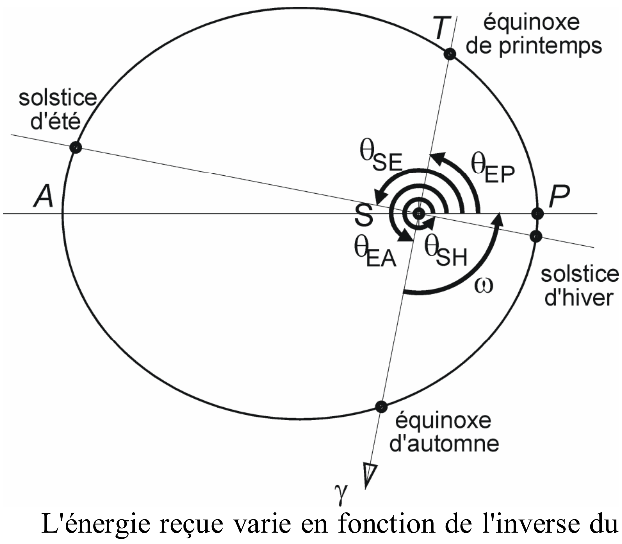
Programmation

La programmation des formules est simple. Il faut se souvenir que les angles sont en radians dans les fonctions trigonométriques.

Pour les angles, il y a lieu de se ramener à l'intervalle [0-360°[, ainsi que pour les durées qui sont à l'intérieur de la période P (365,25 jours).

Les distances Soleil-Terre aux solstices et l'ensoleillement

Les changements climatiques sont en partie conditionnés par la différence des ensoleillements aux cours des saisons et surtout la différence entre l'ensoleillement été-hiver. Il est intéressant de calculer le rapport des énergies reçues en fonction des variations des distances entre l'été et l'hiver.



L'énergie reçue varie en fonction de l'inverse du carré des distances :

$$\frac{E_{SH}}{E_{SE}} = \frac{1/r_{SH}^2}{1/r_{SE}^2} = \frac{r_{SE}^2}{r_{SH}^2}$$

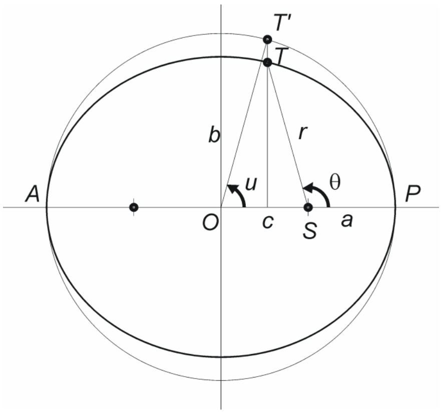
Comme on obtient les θ pour les différentes positions, les r sont calculables immédiatement. Le rapport est trouvé.

Les énergies reçues en un point de la Terre sont fonction de l'inclinaison des rayons du Soleil donc de la latitude φ. On pourra comparer les énergies reçues sur les deux hémisphères.

Annexe 1 : Démonstration de la relation (2)

On pose $a = OP$, $c = OS$, $e = c / a$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } x^2 + y'^2 = a^2$$



on tire $\frac{y}{y'} = \frac{CT}{CT'} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$

$SC = r\cos\theta$

$SC = a\cos u - c = a(\cos u - e)$

d'où

$r\cos\theta = a(\cos u - e) \quad (1A)$

de même

$CT = r\sin\theta$

$CT = CT'\sqrt{1-e^2} = a\sin u\sqrt{1-e^2}$

d'où

$r\sin\theta = a\sin u\sqrt{1-e^2} \quad (2A)$

Des deux relations 1A et 2A on tire aisément : $r = a(1-e\cos u)$, que l'on peut écrire :

$$r(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}) = a(1-e\cos u) \quad (3A)$$

La relation 1A peut s'exprimer en remplaçant le *cos*θ par son expression en fonction de $\theta/2$. On obtient alors :

$$r(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}) = a(\cos u - e) \quad (4A)$$

Fichier Excel

Les calculs et la programmation des formules se trouvent dans le fichier *durees_saisons.xls* disponible sur le site :
www–obs.univ–lyon1.fr/labo/fc/cdroms/cdrom2007/cd_tls2007/index.htm#a11

En ajoutant 3A et 4A, on extrait $\cos^2\theta/2$; en les retranchant on obtient $\sin^2\theta/2$. Le rapport des deux relations obtenues donne $\tan^2\theta/2$, qui se simplifie ainsi :

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{u}{2}$$

En notant que $\theta/2$ et $u/2$ sont toujours dans le même quadrant trigonométrique, on trouve donc la relation cherchée :

$$\tan\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

Annexe 2 : Démonstration de la relation (3)

En différentiant par rapport au temps t la relation précédente, et en simplifiant à l'aide des relations donnant $\cos^2\theta/2$ et r, on aboutit à :

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{a^2}{2}(1-e\cos u)\sqrt{1-e^2}\frac{du}{dt}$$

Or, $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ est la surface balayée par le rayon vecteur r (2ème loi de Kepler). C'est une constante, qui est aussi égale à l'aire de l'ellipse ($\pi a^2\sqrt{1-e^2}$) divisée par la période P. On aboutit alors à :

$$\frac{a^2}{2}(1-e\cos u)\sqrt{1-e^2}\frac{du}{dt} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P}$$

équation qui se simplifie et s'intègre en la relation cherchée, dite *équation de Kepler* :

$$u - e\sin u = \frac{2\pi}{P}(t-t_o) = M$$

t_o étant la constante d'intégration.

Pour le détail des démonstrations voir *Astronomie générale* d'André Danjon, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1980, pages 61 et 168.