Convergence : l'équation d'un miroir parfait

G. Paturel, Observatoire de Lyon

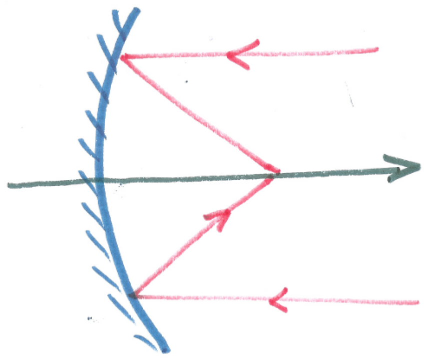
Résumé : *Nous allons expliquer et montrer par un calcul très simple que l'équation d'un miroir parfait de télescope est un paraboloïde de révolution. L'idée sous-jacente est la recherche d'un moyen de fabriquer un tel miroir à très bas prix.*

Analyse du problème

Une lumière monochromatique qui arrive d'une étoile peut être considérée, avec un très haut degré de précision, comme une onde plane d'amplitude constante et de longueur d'onde unique. En effet, quand l'observateur est très proche d'une source lumineuse ponctuelle, l'amplitude de l'onde émanant de cette source varie comme l'inverse de la distance. C'est la condition nécessaire pour que la loi de conservation de l'énergie soit satisfaite. La courbure des surfaces d'égale phase est notable. Mais, quand le source ponctuelle est très lointaine et que nous l'analysons avec une ouverture de petit diamètre comparée à la distance de la source, alors l'amplitude peut être regardée comme constante et les surfaces d'égale phase comme des plans.

Comment faire pour former une image de cette source ponctuelle lointaine ? La réponse est connue de tous : il suffit de faire converger les rayons lumineux en un seul point, de telle manière que tous les rayons en phase dans l'onde plane, arrivent au même instant au point de convergence.

Le problème étant posé, il faut le résoudre. En fait, il y a plusieurs façons de faire converger les rayons d'une telle onde. On peut utiliser un miroir concave, une lentille classique, une lentille de Fresnel, une lentille interférentielle (connue sous le nom de réseau zoné de Soret) ou même une lentille gravitationnelle. Nous commencerons par le cas le plus simple : le miroir concave. Le dernier cas, même s'il est effectivement utilisé en astronomie, est un cas très particulier dont nous aurons sans doute l'occasion de reparler. Pour l'instant nous allons nous occuper de la première méthode : l'utilisation d'un miroir concave.



Se pose alors le problème de savoir quelle forme précise donner au miroir. C'est ce que nous allons calculer maintenant.

Calcul de l'équation du miroir

Remarquons tout d'abord que par raison de symétrie, la surface du miroir doit être une surface de révolution autour de la ligne de visée, qui sera, de fait, l'axe optique de notre système. Il suffira de trouver l'équation de la courbe d'intersection du miroir et d'un plan quelconque passant par l'axe optique. C'est cette courbe dont nous allons calculer l'équation.

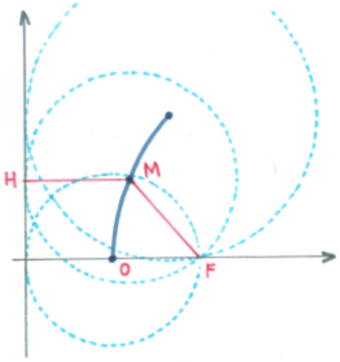
La deuxième remarque est que le chemin optique d'un rayon réfléchi sur un miroir[1] ne dépend pas de la longueur d'onde. Le résultat sera donc valable, même pour une source non monochromatique. Ceci ne sera pas vrai pour une lentille simple, car le chemin optique dépend de l'indice de réfraction du verre, qui lui-même dépend de la longueur d'onde.

[1] Il faut naturellement que la couche métallique réfléchissante soit directement exposée aux rayons lumineux et non derrière le support de verre, comme c'est le cas pour un miroir de salle de bain.

Considérons la figure sur la colonne de droite. Une onde plane progresse de la droite vers la gauche. Nous avons dessiné les plans d'égale phase successifs (bleu clair). En l'absence de miroir sur le trajet chaque point du plan (P_o) irait sur le plan (P) en suivant une ligne parallèle à l'axe optique. Si l'onde P_o touche le miroir en *M*, la réflexion se fait sur ce point *M* du miroir et le rayon réfléchi arrive au foyer en *F*. En l'absence de miroir le rayon serait arrivé en *H* avec la même phase que dans le plan P_o. Si nous voulons que la phase du point *M* ne soit pas altérée en *F*, il suffit que le trajet *MH*=*MF*.
Pour un autre point *M*' de l'onde arrivant sur le miroir un peu avant (ou après), la même condition doit être satisfaite. En conclusion, tous les rayons du plan P_o arriveront en *F* avec la phase qu'ils auraient eue dans le plan P quand la condition *MH*=*MF* est satisfaite.

Représentation géométrique

On peut tracer les cercles tangents au plan P et passant par le point *F*. Le lieu géométrique du centre de ces cercles satisfait la condition cherchée. Si vous vous rappelez votre cours de géométrie, le lieu des centres des cercles tangents à une droite donnée et passant par un point donné est une parabole.



La parabole est le lieu des centres des cercles passant par un point donné et tangents à une droite donnée.

L'équation cherchée est une parabole et le miroir sera un paraboloïde de révolution.

Équation mathématique

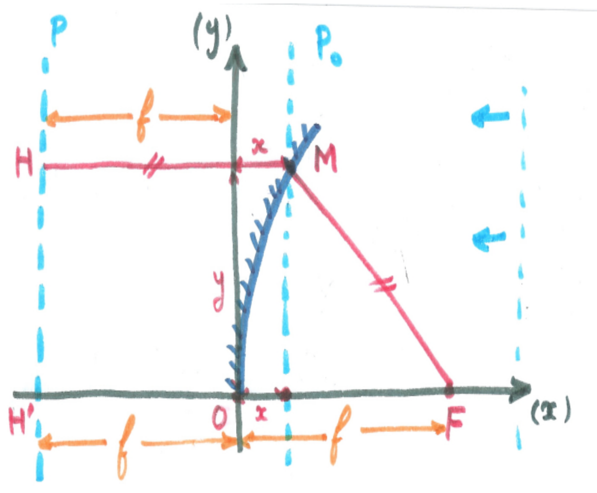
On peut noter que, sur l'axe optique, le miroir doit être en un point *O*, milieu du segment [*FH*']. Nous allons considérer le repère *yOx*. L'axe des *x* étant le long de l'axe optique, compté positivement de la gauche vers la droite, l'axe *y* passera par *O* et sera perpendiculaire à l'axe optique (la direction a peu d'importance à cause de la symétrie de révolution).

En posant *OF*=*f* (évidemment, la valeur *f* sera appelée la distance focale), on a :

$$MH = f + x$$

et

$$MF = \sqrt{y^2 + (f - x)^2} \, .$$



La condition *MH*=*MF*, équivalente à la condition $MH^2=MF^2$, s'écrit donc :

$$(f + x)^2 = y^2 + (f - x)^2 \, ,$$

qui, une fois développée et simplifiée, conduit à :

$$y^2 = 4\,fx \quad \text{ou} \quad x = \frac{y^2}{4f} \qquad (1)$$

égalités dans lesquelles on reconnaît l'équation de la parabole représentant la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{4f} y^2$

Autrement dit, *x* mesure l'écart à la planéité, à une distance *y* de l'axe optique. Nous appellerons cette quantité *x* la "*déformation*".

Application numérique

Passons à une application numérique. Tout d'abord nous pouvons noter que la dérivée *dx/dy* est une fonction linéaire de *y*. Au centre, la courbure du miroir est telle que le miroir est tangent, en *O*, au plan perpendiculaire à l'axe optique.

Considérons maintenant un disque de rayon $R=y_{max}$=6 cm.

Quelle devrait être la déformation x_{max}, au bord du disque, pour que la distance focale soit de 72 cm ?

L'application de la relation (1) donne immédiatement la réponse:

x_{max} = 1/8 cm, soit 1,25 mm.

Le bord du disque doit être soulevé de 1,25mm.
De même nous pouvons calculer la déformation au demi-rayon (y=3cm). Nous obtenons : x=0,31 mm. La courbure est très faible. Plus la focale est grande, plus la déformation est faible à un rayon donné. Un miroir de 12 cm de diamètre et de 100 cm de focale aurait une déformation maximale de 0,9 mm à la périphérie.

Pourquoi ces calculs ?

Tout d'abord il y a la curiosité. Mais la véritable raison est que nous voudrions savoir s'il est possible de déformer un CD-ROM pour en faire un véritable miroir parabolique. J'avais fait quelques essais infructueux, mais j'avais pu constater, néanmoins, que je parvenais à focaliser l'image du Soleil. J'avais appliquée une déformation du CD, simplement en le plaçant sur un tore souple et en appuyant sur le centre du disque. Dans ce cas, la déformation était plus importante au centre qu'au bord, alors que l'équation montre qu'il faut que la déformation aille croissant du centre vers le bord. La conclusion est qu'il faut procéder autrement. L'idée serait de coller le disque du CD sur un disque rigide portant des couronnes concentriques d'épaisseurs *ad hoc*.

Ce projet, un peu fou, présente de toutes façons un autre problème. Un CD se comporte comme un réseau de diffraction aux rayures circulaires. On peut s'attendre à ce que seule l'image centrale soit une image blanche, comme dans un réseau classique de diffraction. Les images sur les bords devraient présenter des irisations.
Pour un miroir parabolique en verre recouvert d'une couche d'aluminium déposée par vaporisation sous vide, ce problème ne se pose pas, puisque l'angle de réflexion ne dépend pas de la longueur d'onde. Le système est parfaitement achromatique.

Nous allons tenter néanmoins cet essai et nous vous tiendrons au courant, quel qu'en soit le résultat.
Nous verrons dans de prochains articles les convergences obtenues par lentille de verre et par interférences. A suivre donc...

■

Délire de jeunes astronomes

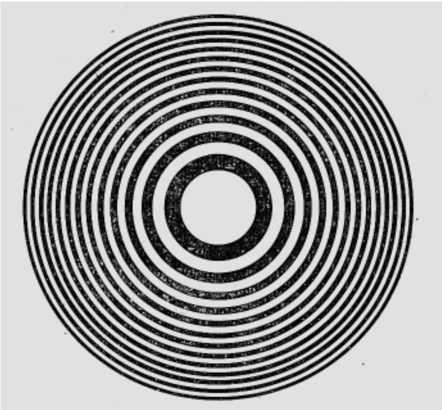
Quand j'étais jeune, en compagnie de quelques collègues, nous avions fantasmé sur un projet encore plus fou : celui d'utiliser un miroir de mercure tournant. Vous savez que la surface d'un liquide tournant prend la forme exacte d'un paraboloïde, d'où l'idée.

Nous n'imaginions pas que ce serait utilisé un jour. Pourtant, des télescopes à miroir de mercure ont été construits au Canada par Paul Hickson et Ermanno Borra. Le plus gros miroir a un diamètre de 6 mètres. La technique semble très prometteuse pour de futurs très grands télescopes.

Nous avions même poussé le délire jusqu'à imaginer produire des vibrations dans le liquide avec un quartz piézo-électrique pour créer un réseau concave. Mais cela n'existe pas... encore.

Credit Guy Plante, Univ. Laval

Le réseau zoné de Soret.



Crédit G. Bruhat - Optique

Un tel réseau se comporte comme une lentille convergente ayant plusieurs distances focales. Nous aurons sans doute l'occasion d'en reparler dans la série "convergence".