Vénus et Maths

Pierre Causeret, pierre.causeret@wanadoo.fr

Résumé : *Depuis maintenant deux mois, nous pouvons admirer l'étoile du Berger dans le ciel. Elle va continuer à augmenter d'éclat pour disparaître fin mars et réapparaître en avril dans le ciel du matin. C'est l'occasion de quelques exercices de maths pour les élèves de collège et de lycée (niveau 3^{e}-2de pour la plupart des questions) que vous pourrez adapter pour votre classe (l'énoncé est sur le site du CLEA), faire en cours ou donner en DM… Les profs de physique peuvent aussi l'utiliser. Une partie des questions est inspirée du HS9 des Cahiers Clairaut, Maths et Astronomie, d'autres sont liées à l'actualité.*

Données

On suppose que Vénus et la Terre parcourent des orbites circulaires autour du Soleil à vitesse constante et dans le même plan.
On note R_T le rayon de l'orbite terrestre, R_V le rayon de l'orbite de Vénus, P_T et P_V les périodes ou durées de révolution respectives de la Terre et Vénus.

On prendra :
R_T = 150 000 000 km ; R_V = 108 000 000 km ;
P_T = 365 j ; P_V = 225 j.

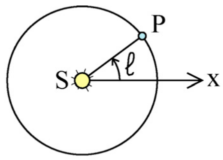
Première partie

1. Ecrire R_T et R_V en notation scientifique en km puis en mm.
2. Représenter les orbites de Vénus et de la Terre à l'échelle 1/2 500 000 000 000 (noter S le Soleil).
3. Vénus et la Terre ont sensiblement le même diamètre (entre 12000 et 13000 km). Calculer ce que deviendrait ce diamètre à cette échelle.
4. Sur le schéma, noter T la position de la Terre à un endroit quelconque de son orbite, V_1 la position de Vénus la plus proche de la Terre ("conjonction inférieure") et V_2 la plus lointaine ("conjonction supérieure"). Calculer TV_1 et TV_2.
5. Placer Vénus sur le schéma (position V_3) pour que l'angle Soleil Terre Vénus soit le plus grand possible ("élongation maximale").

Calculer alors la distance TV_3 et l'angle $\widehat{STV_3}$.

6. Représenter Vénus en V_3 par un cercle de 1 cm de diamètre. Colorier en noir la partie de Vénus non éclairée par le Soleil. Comment verra-t-on Vénus dans un télescope ?

Deuxième partie (spéciale 2009)



Sur ce schéma du système solaire vu du nord, [Ox) sert d'origine pour la mesure des angles. Toutes les planètes tournent autour du Soleil dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On appelle longitude d'une planète, l'angle $\widehat{xOP}$ mesuré en degrés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

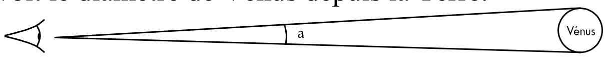
1. Calculer la variation de longitude de Vénus puis de la Terre en un jour (au millième de degré près).
2. On sait que, le 1er janvier 2009 à 0 h la longitude de Vénus était de 48,3° et celle de la Terre de 100,6°. Calculer la longitude de chacune de ces planètes le 14 janvier 2009. Refaire un schéma à l'échelle 1/2 500 000 000 000 puis placer Vénus et la Terre ce jour-là. Comparer avec la question 5 de la première partie.
3. On note t le nombre de jours écoulé depuis le 1er janvier 2009 à 0h, f(t) la longitude de Vénus et g(t) la longitude de la Terre. Ecrire f(t) et g(t) en fonction de t.
4. Calculer à quelle date Vénus et la Terre auront la même longitude. Représenter la Terre et Vénus à ce moment là sur le schéma.
5. Chercher à quelle date on retrouvera une élongation maximale de Vénus.

Questions supplémentaires :

6. Chercher la date de la prochaine conjonction inférieure.
7. Plus difficile : On observe un jour de 2009 que l'élongation de Vénus est de 30°. Quelle est la date ?

8. Calculer le diamètre angulaire de Vénus à l'époque de la conjonction inférieure, de l'élongation maximale et de la conjonction supérieure (en secondes d'arc).

Le diamètre angulaire est l'angle a sous lequel on voit le diamètre de Vénus depuis la Terre.



Remarques pour l'enseignant

C'est au moment de l'élongation maximale que Vénus est la plus facile à observer, elle se couche longtemps après le Soleil (4 h en janvier).

On ne voit pas Vénus passer devant le Soleil lors de la conjonction inférieure car les plans des orbites ne sont pas confondus.

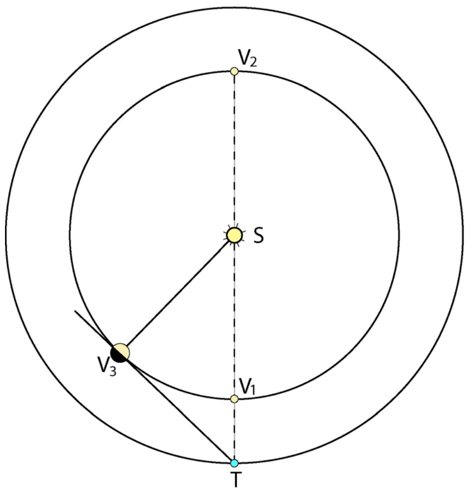
On parle dans l'énoncé de longitude. C'est, plus précisément, la longitude écliptique héliocentrique.

Les calculs proposés ici sont approximatifs, les orbites des planètes n'étant ni circulaires ni uniformes.

Solutions

Première partie

1. $R_T = 1,5\times10^8$ km $= 1,5\times10^{14}$ mm ;
   $R_V = 1,08\times10^8$ km $= 1,08\times10^{14}$ mm ;
2. Rayon de l'orbite de Vénus à l'échelle
   $(1,08\times10^{14}$ mm$)/(2,5\times10^{12}) = 43,2$ mm
   Rayon de l'orbite de la Terre à l'échelle
   $(1,5\times10^{14}$ mm$)/(2,5\times10^{12}) = 60$ mm
3. Diamètre de Vénus ou de la Terre $\approx$ 12 500 km ou $1,25\times10^{10}$ mm ce qui donne 5×10^{-3} mm, c'est trop peu pour que ce soit visible sur le dessin.



4. $TV_1 = 1,5\times10^8$ km $- 1,08\times10^8$ km $= 0,42\times10^8$ km
   soit $4,2\times10^7$ km ou 42 000 000 km ;
   $TV_2 = 1,5\times10^8$ km $+ 1,08\times10^8$ km $= 2,58\times10^8$ km ou 258 000 000 km ;
5. Pour que l'élongation soit maximale, (TV_3) doit être tangente à l'orbite de Vénus (deux positions possibles sur le schéma).

Le triangle STV_3 est donc rectangle, ce qui permet d'utiliser le théorème de Pythagore.

$ST^2 = TV_3{}^2 + SV_3{}^2$. En prenant le million de km comme unité, on obtient :

$150^2 = TV_3{}^2 + 108^2$ d'où $TV_3 = \sqrt{10\,836} \approx 104$

et $\sin \widehat{STV_3} = 108/150$ d'où $\widehat{STV_3} \approx 46°$.

5. On verra Vénus en quartier.

Deuxième partie

1. V : 360°/225j = 1,6 °/j ; T : 360°/365j $\approx$ 0,986 °/j.
2. Vénus : $48,3 + 14\times1,6 = 70,7°$
   Terre : $100,6 + 14\times0,986 \approx 114,4°$

La figure montre que Vénus est à l'élongation maximale.

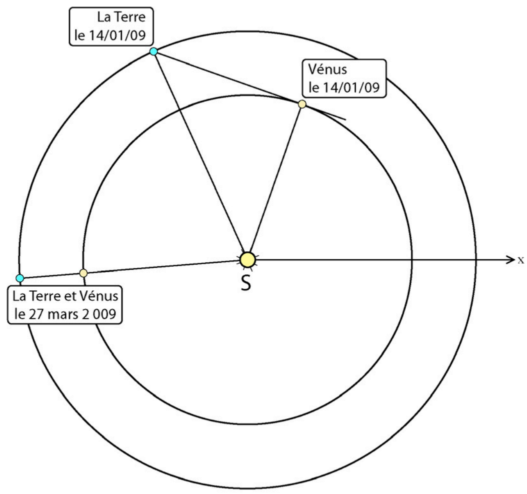
3. $f(t) = 1,6\,t + 48,3$ et $g(t) = 0,986\,t + 100,6$
4. $f(t) = g(t)$ si $1,6\,t + 48,3 = 0,986\,t + 100,6$

ce qui donne $t \approx 85$ jours.

f(t) et g(t) valent alors environ 184,6.

85 jours après le 1er janvier, cela donne le 27 mars.

Ce jour-là, Vénus sera en conjonction inférieure.



5. Du 14 janvier et le 27 mars : 73 jours.

Elongation maximale le 8 juin, 73 j après le 27/03 (ce sera en réalité le 5 juin).

6. On doit donc avoir : $f(t) = g(t) + 360$.

$t \approx 671$, ce qui donne le 3 novembre 2010.

7. SV/sin 30° = ST/sin SVT donne 44° ou 136° pour SVT donc 106° ou 14° pour TSV.

$f(t) - g(t) = -14$ donne $t \approx 62,4$ (3 mars 2009)

$f(t) - g(t) = 14$ donne $t \approx 108$ (18 avril 2009)

$f(t) - g(t) = 106$ donne $t \approx 257,8$ (14/09/2009)

$f(t) - g(t) = -106$ donne $t \approx -87$: on est en 2008.

$f(t) - g(t) = -106 + 360$ on passe en 2010.

On n'a que ces trois solutions en 2009.

(On peut aussi trouver avec Al Kashi et une équation du second degré).

8. Conjonction supérieure : 10"

Elongation maximale : 24"

Conjonction inférieure : 59" (voir HS9 fiche 6)

■