

ARTICLE DE FOND

La masse de la Lune

Béatrice Sandré

Comment déterminer la masse de la Lune ?

À partir des données de l'IMCCE, l'auteur met en évidence la perturbation de la Lune sur le mouvement de la Terre autour du Soleil et détaille une méthode pour déterminer la masse de la Lune avec une bonne précision.

En 1798, Cavendish mesure pour la première fois la masse de la Terre en comparant la force exercée par une masse connue sur une masse m à l'attraction exercée par la Terre sur cette même masse m .

La somme des masses de la Terre et de la Lune se déduit de la troisième loi de Kepler appliquée au mouvement relatif de la Lune autour de la Terre.

Mais ces déterminations sont assez imprécises à cause des modélisations qui sont faites (Terre sphérique à symétrie sphérique pour la première, problème à 2 corps pour la seconde alors que la présence du Soleil n'est pas négligeable). Il semble donc hasardeux de vouloir déterminer la masse de la Lune par différence entre ces deux résultats.

Les éphémérides de l'IMCCE montrent que le mouvement de la Terre autour du Soleil vérifie mal la loi des aires et que ces "anomalies" sont liées à la présence de la Lune qui semble perturber le mouvement de la Terre. L'étude de ces perturbations permet de déterminer le rapport entre les masses m de la Lune et M de la Terre.

La constante des aires de la Terre

La longitude écliptique héliocentrique de la Terre λ , et la distance $ST = r$ de la Terre au Soleil sont des grandeurs mesurables.

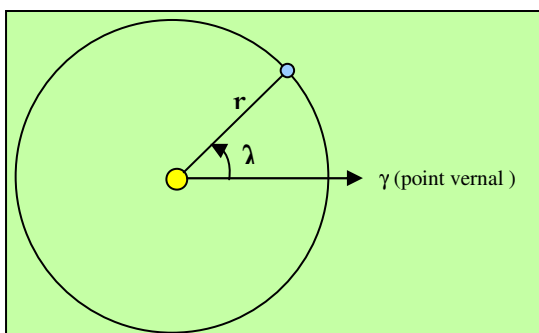


Fig.1. Coordonnées polaires dans le plan de l'écliptique : longitude écliptique héliocentrique λ et distance Soleil Terre r .

Si la Terre tournait seule autour du Soleil, sans la présence de la Lune ni des autres planètes, ces deux

grandeurs devraient vérifier la loi des aires (deuxième loi de Kepler) :

$$r^2 \dot{\lambda} = \text{constante}$$

où $\dot{\lambda}$ est la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil⁷.

Pour plus de facilité, les valeurs de r et de λ n'ont pas été mesurées mais tirées des éphémérides de l'IMCCE⁸.

Au cours du mois de janvier 2010, on a relevé chaque jour à midi la distance r exprimée en unités astronomiques ou ua (colonne 3 du tableau page suivante) et à 0 heure, la longitude écliptique géocentrique du Soleil, soit $\lambda + 180^\circ$ (colonne 2),

exprimée en degrés sexagésimaux. $\dot{\lambda}$, la vitesse angulaire instantanée à 12 h le jour j est confondue avec la vitesse moyenne entre le jour j à 0 h et le jour $(j + 1)$ à 0 h. Elle est exprimée en seconde d'angle par jour (colonne 4).

On peut ainsi calculer $r^2 \dot{\lambda}$ chaque jour de ce mois de janvier en $ua^2 \times '' / \text{jour}$ (colonne 5).

On constate que $r^2 \dot{\lambda}$ n'est pas rigoureusement constant. Cette grandeur passe par un minimum le 31 décembre 2009 et le 30 janvier 2010 qui sont des jours de pleine Lune et par un maximum le 15 janvier qui est un jour de nouvelle Lune.

Si on recommence ce travail un autre mois d'une autre année, on constate toujours que $r^2 \dot{\lambda}$ est minimum à la pleine Lune et maximum à de la nouvelle Lune.

La Lune perturbe le mouvement de la Terre autour du Soleil.

⁷ Les physiciens ont l'habitude de noter avec un point la dérivée par rapport au temps.

⁸ Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides (www.imcce.fr)

Date	λ en ° ' "	r ua	$\Delta \lambda$ en "	$r \times r \times \Delta \lambda$	
30/12/09	278° 16' 30,872"	0,98333039	3667,3446	3546,0973	
31/12/09	279° 17' 38,2166"	0,9833104	3667,4195	3546,0255	PL
01/01/10	280° 18' 45,6361"	0,9832971	3667,5388	3546,0449	
02/01/10	281° 19' 53,1749"	0,98329048	3667,7037	3546,1566	
03/01/10	282° 21' 0,8786"	0,98329043	3667,9064	3546,3522	
04/01/10	283° 22' 8,785"	0,98329673	3668,1325	3546,6163	
05/01/10	284° 23' 16,9175"	0,98330909	3668,363	3546,9284	
06/01/10	285° 24' 25,2805"	0,98332719	3668,5785	3547,2673	
07/01/10	286° 25' 33,859"	0,98335068	3668,7607	3547,6129	
08/01/10	287° 26' 42,6197"	0,98337923	3668,895	3547,9488	
09/01/10	288° 27' 51,5147"	0,98341255	3668,9689	3548,2607	
10/01/10	289° 29' 0,4836"	0,98345036	3668,9734	3548,5379	
11/01/10	290° 30' 9,457"	0,98349245	3668,9015	3548,7721	
12/01/10	291° 31' 18,3585"	0,98353863	3668,7481	3548,957	
13/01/10	292° 32' 27,1066"	0,98358875	3668,5099	3549,0883	
14/01/10	293° 33' 35,6165"	0,98364272	3668,1848	3549,1632	
15/01/10	294° 34' 43,8013"	0,98370048	3667,7725	3549,181	NL
16/01/10	295° 35' 51,5738"	0,98376199	3667,2735	3549,142	
17/01/10	296° 36' 58,8473"	0,98382728	3666,6899	3549,0482	
18/01/10	297° 38' 5,5372"	0,98389639	3666,0246	3548,9029	
19/01/10	298° 39' 11,5618"	0,98396942	3665,281	3548,7097	
20/01/10	299° 40' 16,8428"	0,98404647	3664,464	3548,4744	
21/01/10	300° 41' 21,3068"	0,9841277	3663,5786	3548,2027	
22/01/10	301° 42' 24,8854"	0,98421327	3662,6312	3547,902	
23/01/10	302° 43' 27,5166"	0,98430339	3661,6295	3547,5813	
24/01/10	303° 44' 29,1461"	0,9843983	3660,5836	3547,252	
25/01/10	304° 45' 29,7297"	0,98449825	3659,5058	3546,9277	
26/01/10	305° 46' 29,2355"	0,98460352	3658,4117	3546,6256	
27/01/10	306° 47' 27,6472"	0,98471439	3657,3195	3546,3653	
28/01/10	307° 48' 24,9667"	0,98483112	3656,2485	3546,1674	
29/01/10	308° 49' 21,2152"	0,98495389	3655,216	3546,05	
30/01/10	309° 50' 16,4312"	0,98508283	3654,2336	3546,0251	PL
31/01/10	310° 51' 10,6648"	0,98521792	3653,3047	3546,0961	
01/02/10	311° 52' 3,9695"	0,98535903			

Fig.2. Coordonnées de la Terre au mois de janvier 2010.
 $\Delta \lambda$ est la variation de la longitude écliptique entre le jour j à 0h et le jour j + 1 à 0 h.

Interprétation qualitative

La distance Terre - Lune étant très petite devant la distance Terre - Soleil, pour résoudre le problème de ces 3 corps, on peut assimiler le système Terre-Lune à un point matériel G de masse (m + M) confondu avec son centre d'inertie et gravitant autour du Soleil en vérifiant les lois de Kepler et en particulier la loi des aires :

$$SG^2 \times \dot{\lambda}_G = C \text{ (constante)}$$

La Terre et la Lune décrivent dans le référentiel barycentrique des ellipses de foyer G. Nous négligerons l'angle entre le plan de l'orbite lunaire et celui de l'écliptique. Autrement dit, nous supposerons que les figures ci-dessous sont planes.

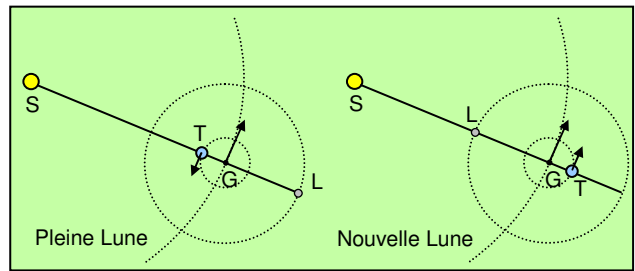


Fig.3. Positions et vitesses de la Terre T et du centre de masse G en pleine Lune et en nouvelle Lune.

À la pleine Lune, les vitesses de G dans le référentiel héliocentrique et de T dans le référentiel barycentrique sont de sens opposés donc $\dot{\lambda} < \dot{\lambda}_G$.

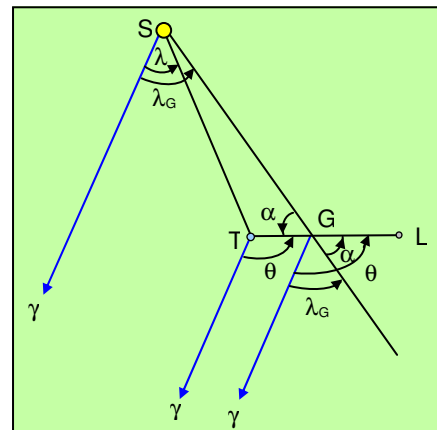
De plus, $r = SG - TG < SG$. C'est pourquoi $r^2 \dot{\lambda}$ passe par un minimum à la pleine Lune.

À la nouvelle Lune, les vitesses de G dans le référentiel héliocentrique et de T dans le référentiel barycentrique sont de même sens donc $\dot{\lambda} > \dot{\lambda}_G$.

De plus, $r = SG + TG > SG$. C'est pourquoi $r^2 \dot{\lambda}$ passe par un maximum à la nouvelle Lune.

L'écart entre les valeurs de $r^2 \dot{\lambda}$ à la nouvelle Lune et à la pleine Lune est directement lié à la distance GT que nous allons donc pouvoir calculer.

Détermination du centre d'inertie du système Terre - Lune



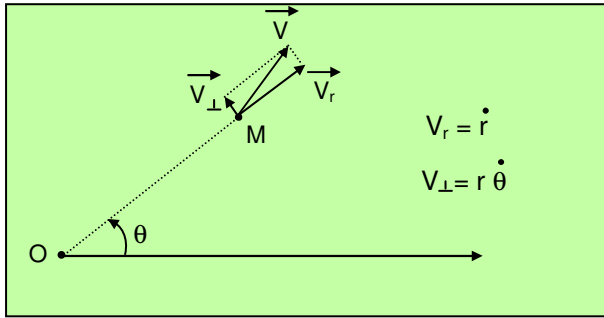
$\lambda = \left(\vec{S\gamma}, \vec{ST} \right)$ est la longitude écliptique héliocentrique de la Terre.

$\lambda_G = \left(\vec{S\gamma}, \vec{SG} \right)$ est la longitude écliptique héliocentrique de G, centre d'inertie du système Terre-Lune.

$\alpha = \left(\vec{GS}, \vec{GT} \right)$. À la pleine Lune, $\alpha = 0$.

À la nouvelle Lune, $\alpha = 180^\circ$.

$\theta = (\vec{T}\gamma, \vec{TL}) = (\vec{G}\gamma, \vec{GL})$ est la longitude éclipique géocentrique de la Lune ; c'est une grandeur mesurable qui sera relevée dans les éphémérides.



La vitesse orthoradiale de T dans le référentiel héliocentrique R_H est $ST \dot{\lambda}$.

La vitesse orthoradiale de la Terre dans le référentiel barycentrique est $GT \dot{\theta}$

Le référentiel barycentrique étant en translation par rapport au référentiel héliocentrique, tous ses points ont même vitesse dans R_H . Cette vitesse est celle de G par exemple ; la vitesse orthoradiale de G dans le référentiel héliocentrique est $SG \dot{\lambda}_G$.

À la **pleine Lune**, ces trois vitesses orthoradiales ont la même direction (les points S,T,G sont alignés) mais la deuxième est de sens opposé aux deux autres, la loi de composition des vitesses permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} ST \dot{\lambda} &= SG \dot{\lambda}_G - TG \dot{\theta} \\ ST \dot{\lambda} &= (ST + GT) \dot{\lambda}_G - TG \dot{\theta} \\ \dot{\lambda} &= \left(1 + \frac{GT}{ST}\right) \dot{\lambda}_G - \frac{GT}{ST} \dot{\theta} \end{aligned}$$

C étant la constante des aires du mouvement de G,

$$\dot{\lambda}_G = \frac{C}{SG^2} = \frac{C}{(ST + TG)^2} = \frac{C/ST^2}{\left(1 + \frac{GT}{ST}\right)^2}$$

d'où
$$\frac{C/ST^2}{\left(1 + \frac{GT}{ST}\right)} = \dot{\lambda} + \dot{\theta} \frac{GT}{ST}$$

On pose $k = \frac{GT}{TL}$ et on obtient :

$$\frac{C/ST^2}{\left(1 + k \frac{TL}{ST}\right)} = \dot{\lambda} + \dot{\theta} k \frac{TL}{ST} \quad (\text{équation 1})$$

À la **nouvelle Lune**, les trois vitesses orthoradiales sont parallèles et de même sens.

De la même façon, la loi de composition des vitesses permet d'écrire :

$$ST \dot{\lambda} = SG \dot{\lambda}_G + TG \dot{\theta}$$

$$ST \dot{\lambda} = (ST - GT) \dot{\lambda}_G + TG \dot{\theta}$$

$$\dot{\lambda} = \left(1 - \frac{GT}{ST}\right) \dot{\lambda}_G + \frac{GT}{ST} \dot{\theta}$$

et
$$\dot{\lambda}_G = \frac{C}{SG^2} = \frac{C}{(ST - TG)^2} = \frac{C/ST^2}{\left(1 - \frac{GT}{ST}\right)^2}$$

d'où
$$\frac{C/ST^2}{\left(1 - \frac{GT}{ST}\right)} = \dot{\lambda} - \dot{\theta} \frac{GT}{ST}$$
 soit

$$\frac{C/ST^2}{\left(1 - k \frac{TL}{ST}\right)} = \dot{\lambda} - \dot{\theta} k \frac{TL}{ST} \quad (\text{équation 2})$$

Pour la suite du calcul, nous mettrons un indice 1 aux grandeurs concernant la pleine Lune et un indice 2 aux grandeurs concernant la nouvelle Lune. Seule la constante des aires C du mouvement de G et le rapport k ont les mêmes valeurs dans les équations 1 et 2. Toutes les autres grandeurs sont mesurables. En éliminant C entre les deux équations, on obtiendra une nouvelle équation avec comme seule inconnue k. Sa résolution va nous permettre de connaître le rapport GT/GL et d'en déduire la masse de la Lune en fonction de celle de la Terre.

Suite des calculs de la colonne 2

On reprendra $ST = r$ et on posera $TL = d$. TL, (la distance Terre-Lune est une grandeur mesurable).

$$\begin{aligned} C &= \left(\dot{\lambda}_1 + \dot{\theta}_1 k \frac{d_1}{r_1}\right) \left(1 + k \frac{d_1}{r_1}\right) r_1^2 = \left(\dot{\lambda}_2 - \dot{\theta}_2 k \frac{d_2}{r_2}\right) \left(1 - k \frac{d_2}{r_2}\right) r_2^2 \\ \left(\dot{\lambda}_2 r_2^2 - \dot{\lambda}_1 r_1^2\right) - k \left[d_1 r_1 \left(\dot{\lambda}_1 + \dot{\theta}_1\right) + d_2 r_2 \left(\dot{\lambda}_2 + \dot{\theta}_2\right)\right] + k^2 \left(\dot{\theta}_2 d_2^2 - \dot{\theta}_1 d_1^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

On peut remarquer que le rapport d/r entre les distances Terre-Lune et Terre-Soleil est très petit devant 1. Le coefficient k étant compris entre 0 et 1, on peut négliger le terme en k^2 de l'équation (à moins que l'on aime résoudre les équations du second degré).

On obtient donc :

$$k = \frac{\dot{\lambda}_2 r_2^2 - \dot{\lambda}_1 r_1^2}{d_1 r_1 (\dot{\lambda}_1 + \dot{\theta}_1) + d_2 r_2 (\dot{\lambda}_2 + \dot{\theta}_2)}$$

C'est bien l'écart entre les "constantes des aires" de la Terre à la pleine Lune et à la nouvelle Lune qui indique que G n'est pas confondu avec T .

Valeurs numériques

Les valeurs de r sont données dans les éphémérides en unité astronomique. On les convertira en km sachant que 1 ua = 149 597 870 km.

Les valeurs de d sont données dans les éphémérides en unité de rayon équatorial terrestre. On les convertira en km sachant que $R_T = 6\,378$ km.

Dans les éphémérides, on lit λ et θ et non $\dot{\lambda}$ et $\dot{\theta}$.

Pour connaître $\dot{\lambda}$ et $\dot{\theta}$ à la date t , on relèvera les valeurs de λ et θ aux dates $(t - 10 \text{ min})$ et $(t + 10 \text{ min})$ et on confondra la vitesse instantanée à la date t avec la vitesse moyenne entre les dates $(t - 10 \text{ min})$ et $(t + 10 \text{ min})$. Ces vitesses angulaires seront exprimées en " / jour.

La pleine Lune du 30 janvier a eu lieu à 6 h 19 min. À cette date, $r_1 = 0,985\,051\,740$ ua et $d_1 = 55,911\,550\,029 R_T$

À 6 h 09 min de ce même jour, $\lambda_{11} = 310^\circ 05' 52,9200''$ et $\theta_{11} = 130^\circ 00' 4,9159''$

À 6 h 29 min de ce même jour, $\lambda_{12} = 310^\circ 06' 43,6764''$ et $\theta_{11} = 130^\circ 12' 48,5576''$

On obtient alors :

$$\lambda_{12} - \lambda_{11} = (6 \times 60 + 43,6764) - (5 \times 60 + 52,9200) = 50,7564'' \text{ en } 20 \text{ min}$$

$$\text{puis } \dot{\lambda}_1 := 50,7564 \times 3 \times 24 = 3\,654,4608'' / \text{jour}$$

et de la même façon $\dot{\theta}_1 = 54\,982,2024'' / \text{jour}$.

La nouvelle Lune du 15 janvier a eu lieu à 7 h 13 min. À cette date, $r_2 = 0,983\,688\,665$ ua et $d_2 = 63,560\,466\,490 R_T$

À 7 h 03 min de ce même jour, $\lambda_{21} = 294^\circ 52' 41,2561''$ et $\theta_{21} = 294^\circ 48' 54,1693''$

À 7 h 23 min de ce même jour, $\lambda_{22} = 294^\circ 52' 41,2561''$ et $\theta_{22} = 294^\circ 58' 46,6702''$

On obtient alors $\dot{\lambda}_2 = 3\,667,8672'' / \text{jour}$

$\dot{\theta}_2 = 42\,660,0648'' / \text{jour}$.

Ces valeurs numériques conduisent à : **$k = 0,0121$**

Conclusion

G étant le centre d'inertie du système Terre-Lune,

$$\frac{m}{GT} = \frac{M}{GL} = \frac{m+M}{TL} \quad \text{d'où} \quad \frac{GT}{TL} = \frac{m}{m+M} = k \quad \text{et}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{1}{k} - 1 = 81,5$$

La masse de la Terre vaut 81,5 fois celle de la Lune

Remarque

Ce résultat permet de calculer la constante C et, en appliquant la deuxième loi de Kepler, d'en déduire la durée T d'une révolution de G (et non de la Terre) autour du Soleil.

$C = \frac{2\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$ si les angles intervenant dans le calcul C sont exprimés en radians. S'ils sont exprimés comme ici en secondes,

$$C = \frac{360 \times 3600 \times a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$$

Sachant que

$a = 1$ ua = 149 597 870 km et $e = 0,01671022$, on obtient $T = 365,256$ jours

On a vérifié ici que les valeurs de l'IMCCE sont bien calculées. ■