ARTICLE DE FOND

La masse de la Lune

Georges Paturel, observatoire de Lyon

Nous revenons sur une application publiée en 2009 pour calculer la masse de la Lune. Nous expliquons la bonne méthode. Elle consiste en la mesure du rapport de masse Terre/Lune.

Masses de la Terre et de la Lune

Nous savons que Cavendish a pu déterminer la masse de la Terre en comparant la force qu'elle produit sur une masse donnée (force qu'on appelle le poids) à la force produite par deux masses connues. Mais comment peut-on mesurer la masse de la Lune ? À notre époque où l'on envoie des sondes au voisinage de la Lune, cette détermination est possible très directement en mesurant l'accélération que produit la Lune sur la sonde. Mais avant l'exploration spatiale qu'en était-il ?

Dans un numéro de 2009 des Cahiers Clairaut (CC 127, p 31) nous avions donné une méthode pour obtenir, simplement, la masse de la Terre et de la Lune à partir de la troisième loi de Kepler (voir l'encadré A). La méthode n'était pas très précise mais l'ordre de grandeur était correct. Était-ce un hasard ? Je ne le pense pas. Ce résultat provenait de ce qu'on utilisait la distance moyenne Terre-Lune et la période sidérale moyenne de la Lune. Cette moyenne absorbait les nombreuses irrégularités qui auraient entaché une détermination à partir de valeurs instantanées. Nous pouvions ainsi obtenir une très bonne valeur de la masse $M + m$, somme de la masse de la Terre M et de la masse de la Lune m :

$$M + m = 6{,}03 \times 10^{24} \text{ kg.}$$

Cette somme était, pour la précision recherchée, considérée comme "sans incertitude". Pour obtenir la masse de la Lune, il suffisait alors de mesurer M, la masse de la Terre seule. Nous utilisions un pendule[1] (masse négligeable devant celle de la Terre !), mais nous aurions pu le faire en mesurant le temps de chute d'un corps (voir le chapitre suivant). L'une ou l'autre de ces méthodes revient à mesurer l'accélération locale de la pesanteur, le fameux g = 9,81 m.s^{-2}. Cette mesure peut facilement conduire à une estimation de la masse de la Terre de l'ordre[2] de

$$M = (5{,}96 \pm 0{,}02) \times 10^{24}\ kg\ .$$

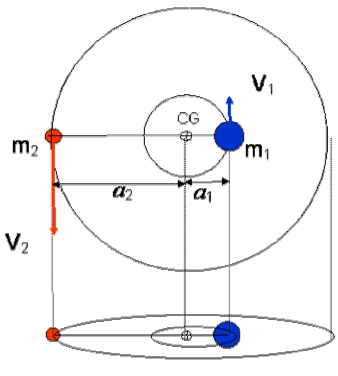
Nous déduisions ainsi la masse de la Lune :

$$m = (6{,}03 - 5{,}96) \times 10^{24} = (7 \pm 2) \times 10^{22} \text{ kg.}$$

Ce résultat, s'il pouvait satisfaire un néophyte, n'était pas suffisant pour un amateur exigeant. Comment fait-on alors ?

Encadré A : La 3e loi de Kepler

Quand deux corps tournent l'un autour de l'autre, en réalité, ils tournent autour du centre de masse. Nous supposons que les mouvements sont circulaires et uniformes. Nous nous plaçons dans le référentiel, supposé galiléen, du centre de masse.



La force d'attraction gravitationnelle est :

$$F = \frac{Gm_1m_2}{(a_1 + a_2)^2}$$

[1] On apprend au lycée que le pendule réversible est plus précis. L'analyse de la chute d'un coin optique où celle d'atomes froids l'est plus encore.

[2] Dans le calcul, on suppose la Terre sphérique et à répartition de masse à symétrie, ce qui n'est pas rigoureu-sement exact.

Encadré A (suite)

Mais l'accélération dynamique (v^2/a) est différente pour chacun des deux corps. Pour le corps 1, la relation fondamentale de la dynamique conduit à (en remplaçant la vitesse v par son expression tirée du périmètre de l'orbite et de la période) :

$$\frac{Gm_1m_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{m_1}{a_1}\cdot v_1^2 = \frac{m_1}{a_1}\cdot\frac{4\pi^2a_1^2}{T^2}$$

Soit en simplifiant par m_1

$$\frac{Gm_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{4\pi^2a_1}{T^2} \qquad \text{(A1)}$$

Pour le corps numéro 2 on aura de même :

$$\frac{Gm_1}{(a_1+a_2)^2} = \frac{4\pi^2a_2}{T^2} \qquad \text{(A2)}$$

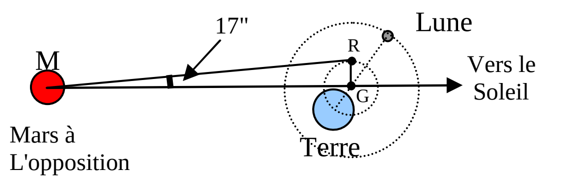
En ajoutant (A1) et (A2) on obtient la relation généralisée de Kepler-Newton, qui permet de traiter des mouvements orbitaux réciproques de deux corps de masse quelconque :

$$\frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2} = \frac{(a_1+a_2)^3}{T^2} \qquad \text{(A3)}$$

La Terre et la Lune tournent autour du centre de masse commun (encadré A). L'orbite de la Terre autour de ce point produit un mouvement parasite d'oscillation dont la période est précisément la période de révolution de la Lune autour de ce centre de masse.

La Terre oscille donc. Cela signifie que tous les astres observés depuis la Terre vont refléter ce mouvement en ayant un mouvement apparent de même période résultant de cet effet de parallaxe.
Pour les corps proches l'effet sera mesurable. Une vieille édition du livre de George Abell « *Exploration of the Universe* » donne l'exemple de la planète Mars qui est affectée d'un petit mouvement oscillant apparent avec la période attendue. Quand la planète Mars est la plus proche de la Terre, ce qu'on appelle l'opposition, Mars est alors à une distance à la Terre d'environ MG = $5{,}7\times10^7$ km. L'amplitude *maximale* de l'oscillation que l'on déduit pour l'instant précis de l'opposition est de 17", un angle très petit, certes, mais mesurable.

Calculons en kilomètres l'amplitude a = RG (voir les schémas ci-dessous) de l'oscillation du centre de la Terre (distance entre le centre de la Terre et le centre de gravité du couple Terre-Lune). En supposant que le mouvement de la Terre autour du centre de masse Terre-Lune est dans le plan de l'orbite de Mars, il se trouve que Mars en opposition est aligné avec le segment reliant le Soleil au centre de masse G du couple Terre-Lune.:



a = MG × tan(17") = 5,7 × 10^7 × tan(17") ≈ 4700 km

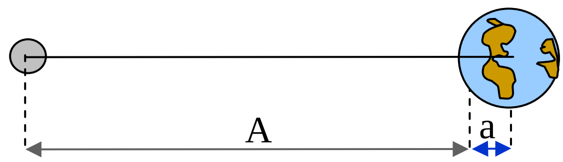
Notons que G, le centre de masse Terre-Lune, est environ à 1 670 km sous la surface de la Terre.

M étant toujours la masse de la Terre et *m* la masse de la Lune, la distance entre le centre de la Lune et le centre de masse du couple Terre Lune est notée *A*, tandis que *a* est, comme vu plus haut, la distance entre ce même centre de masse et le centre de la Terre (voir schémas). En utilisant la relation du centre de masse (Rel. A1/A2), nous obtenons :

$M\cdot a = m\cdot A$,

et avec la distance Terre-Lune : A

$D = a + A \approx 384\,000$ km, on trouve que :



$$\frac{M}{m} = \frac{A}{a} = \frac{D-a}{a} \approx 81$$

La masse de la Lune est 81 fois plus petite que celle de la Terre, c'est-à-dire :

m = $7{,}36\times10^{22}$ kg

Ce rapport entre la masse de la Terre et la masse de la Lune est nécessaire, puisque c'est de la masse de la Terre que nous déduisons la masse de la Lune.
La connaissance de ce rapport a été améliorée par la mesure de l'accélération que la Lune produit sur les sondes, soit celles lancées sur la Lune, soit celles passant à proximité. En octobre 1967, l'analyse du mouvement de la sonde Mariner V a conduit à la valeur :

$$\frac{M}{m} = 81{,}3004 \pm 0{,}0007$$

La détermination de la masse de la Terre est donc fondamentale pour déterminer la masse de la Lune et toutes les masses dans le système solaire et même dans l'Univers. Dans l'exercice que nous proposions en 2009, la partie expérimentale consistait à mesurer la masse de la Terre avec un pendule simple, en supposant connue la constante de la gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I.[3] et le rayon de la Terre. Nous allons revenir sur cette mesure, en déduisant l'accélération de la pesanteur de la mesure du temps de chute d'un corps.

Mesure de la masse de la Terre

Nous allons chronométrer le temps d'une chute de 60 cm de hauteur avec un petit appareil de réalisation simple (figure 1). Pourvu d'un mécanisme à ressort, l'appareil libère la masse d'essai à un instant précis. C'est au moment où le *clapet* s'ouvre que le contact s'établit pour faire démarrer le chronomètre. Ce contact produit l'équivalent d'une pression sur le bouton marche/arrêt du chronomètre. Quand le corps en chute libre arrive sur la *plaque de réception*, un autre microcontact provoque l'arrêt du chronomètre.
Un chronomètre électronique très ordinaire a été utilisé. Deux fils très fins ont été soudés aux bornes du contact marche/arrêt, de telle sorte qu'un microcontact extérieur permet de démarrer ou d'arrêter le chronomètre. Une astuce (voir la figure 1 et l'encadré B) permet de démarrer le chronomètre avec un contact qui s'ouvre.
À partir de la hauteur de chute h et du temps de chute t, on déduit $g = 2h/t^2$, lui-même relié à la masse et au rayon de la Terre par $g = G.M / R^2$.

Les mesures effectuées par le public, lors d'une journée "portes ouvertes" à l'Observatoire de Lyon, ont conduit aux résultats donnés par la figure 2, ci-dessous. La moyenne obtenue est :

$M = (5{,}952 \pm 0{,}016) \times 10^{24}$ kg, ce qui conduit à une masse de la Lune[4] :

$$m = \frac{M}{81{,}3} = (7{,}32 \pm 0{,}02) \times 10^{22} \text{ kg},$$

La valeur admise aujourd'hui est :

$$m = 7{,}349 \times 10^{22} \text{ kg}.$$

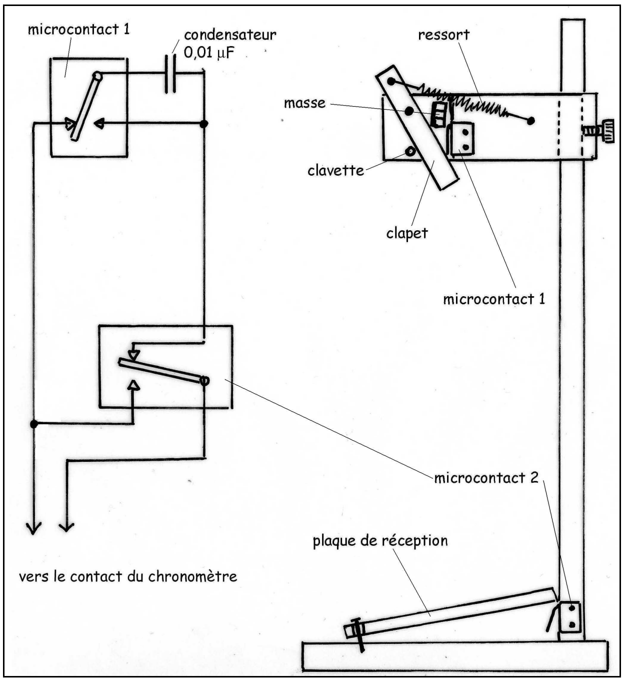


Fig.1. *L'appareil et le schéma du circuit déclencheur (voir encadré B).*

Encadré B : Explication du circuit déclencheur du chronomètre.

Quand le clapet est fermé, le condensateur est déchargé (il est en court-circuit).
Quand le clapet s'ouvre, le condensateur se trouve alors connecté, par le microcontact numéro 1, aux bornes du bouton de démarrage du chronomètre. Le contact s'établit pendant le temps que le condensateur met à se charger (la constante de temps "RC" est de quelques dizaines de nanosecondes).
Quand la masse en chute libre arrive sur la plaque de réception, le microcontact numéro 2 se ferme et arrête le chronomètre.

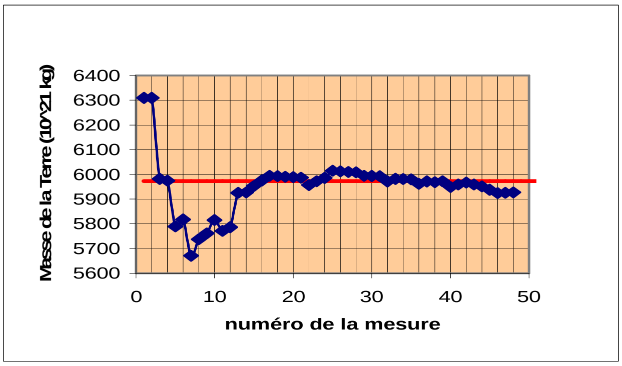


Fig.2. *Évolution de la moyenne des mesures de la masse de la Terre en fonction des mesures successives.*

■

[3] S.I. système international d'unités ; les longueurs sont en mètre, les masses en kilogramme, les forces en newton, le temps en seconde.
[4] L'incertitude est en réalité plus importante car toutes les mesures étaient faites avec le même appareil, celui-ci pouvant engendrer une erreur systématique, sans parler de l'incertitude liée à la non sphéricité de la Terre.