Comment déterminer la masse de la Lune à partir des marées ?

Vincent Deparis
Lycée Jean Monnet - Annemasse
vincent.deparis@neuf.fr

En 1687, Isaac Newton fait la première détermination de la masse de la Lune relativement à celle de la Terre grâce à la hauteur des marées océaniques. En nous inspirant de sa méthode actualisée par Pierre Simon de Laplace en 1825 et en utilisant un fichier d'observations des marées dans le port de Brest mis à disposition sur internet par le SHOM (Service Hydrographique et Océanographique de la Marine), nous effectuons notre propre détermination. Nous verrons que la méthode est simple, mais qu'elle demande un traitement astucieux des observations. Ce travail a été réalisé avec deux lycéens (Jérôme Martinez et Marin Vassor) lors d'un atelier scientifique.

1. Le problème de la masse des corps à l'époque de Newton.

A l'époque de Newton, deux lois de mécanique sont reliées à la masse des corps du système solaire :

- *La troisième loi de Kepler* découverte par Johannes Kepler en 1619, valable pour n'importe quelle planète mais que nous appliquons ici à la Terre. Avec G la constante de la gravitation, n le mouvement moyen de la Terre sur son orbite : $n=2\pi/T$ avec T la période de révolution de la Terre autour du Soleil ; d_S le demi grand axe de l'orbite de la Terre ; M_S la masse du Soleil et M_T la masse de la Terre (négligeable devant la masse du Soleil), on a :
$$n^2 d_S^3 = G(M_S + M_T) \approx GM_S$$
- *La gravité* à la surface de la Terre donnée par Newton en 1687. Avec R le rayon de la Terre et en négligeant l'influence de la rotation journalière de la Terre, il vient :
$$g = \frac{GM_T}{R^2}$$

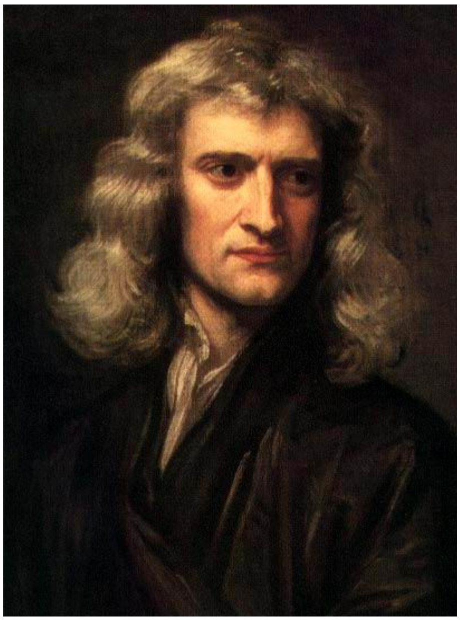
La troisième loi de Kepler donne accès au produit GM_S, la pesanteur g au produit GM_T. Mais comme la constante gravitationnelle G est inconnue (elle ne sera déterminée par Henry Cavendish qu'en 1798), il n'y a aucun moyen de connaître la valeur absolue de M_S ou de M_T, seul le rapport M_T/M_S peut être calculé. A l'époque de Newton, on ne peut donc pas connaître directement la masse des corps mais uniquement leur masse relative à un autre corps.

Pour la Terre et le Soleil, on a :
$$\left.\begin{aligned} n^2 d_S^3 &= GM_S \\ g &= \frac{GM_T}{R^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{donc : } \frac{n^2 d_s^3}{g} = \frac{M_S \times R^2}{M_T} \quad \text{soit : } \frac{M_S}{M_T} = \frac{n^2 \times d_S^3}{g \times R^2}$$

Avec $R=6371\,km$, $g=9{,}81\,m\cdot s^{-2}$, $n=1{,}99\times10^{-7} rad\cdot s^{-1}$ ($T=365{,}25\,jours$), $d_S=150\,millions\,de\,km$, on obtient :
$$\frac{M_S}{M_T} \approx 3{,}35\times10^5$$

Le raisonnement ne peut pas être refait pour la Lune car on ne peut pas lui appliquer la troisième loi de Kepler puisqu'elle ne possède pas de satellite naturel. Newton contourne le problème en utilisant les marées océaniques.

2. L'explication des marées



Newton (1642-1727)

Newton comprend que les marées résultent à la fois de l'action de la Lune et du Soleil et qu'elles sont une conséquence inévitable de l'attraction universelle des corps. Il explique que les parties de la Terre, situées à des distances différentes d'un astre (la Lune ou le Soleil), subissent des attractions différentes de la part de cet astre et que ce sont ces différences d'attraction qui mettent les mers en mouvement. La force de marée due à un astre (la Lune ou le Soleil) se calcule ainsi par la différence vectorielle entre l'attraction de l'astre en un point donné et l'attraction de l'astre au centre de la Terre (Figure 1).

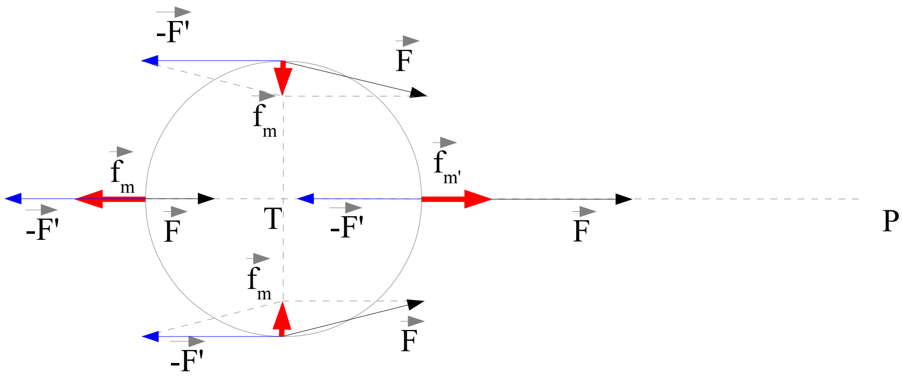


Figure 1 : *Forces de marée créées par l'astre P (Soleil ou Lune) en différents points de la surface terrestre. Le vecteur force de marée (en rouge) est donnée par* $\vec{f}_m=\vec{F}-\vec{F'}$ *avec* $\vec{F}$ *l'attraction de l'astre P au point considéré (en noir) et* $\vec{F'}$ *l'attraction de P au centre T de la Terre (en bleu).*

Les particules situées dans l'hémisphère tourné vers l'astre perturbateur sont plus attirées par l'astre que le centre de la Terre : la force de marée pointe vers l'astre. En revanche, les particules qui sont situées dans l'autre hémisphère sont moins attirées que le centre de la Terre : la force de marée est orientée dans le sens opposé. La force de marée s'oppose donc à la pesanteur pour le point situé à l'aplomb de l'astre perturbateur mais également pour le point situé de l'autre côté de la Terre. Elle a des effets identiques dans les deux hémisphères et présente une symétrie presque parfaite. Ceci permet de comprendre pourquoi les marées hautes surviennent au même instant des deux côtés de la Terre.

Newton suppose que la Terre est entièrement recouverte d'un océan. En raison de la symétrie de la force de marée, il affirme que l'océan se déforme en un ellipsoïde allongé, dont le grand axe est constamment dirigé vers l'astre perturbateur. La rotation de la Terre sur elle-même fait qu'un point de la surface terrestre passe successivement par les deux lieux d'élévation maximale et minimale de la mer, ce qui explique les deux marées basses et les deux marées hautes de la journée (Figure 2).

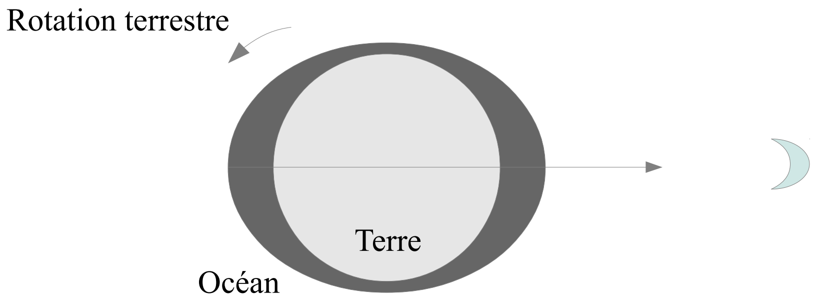


Figure 2 *: L'océan global, qui entoure la Terre, est déformée en un ellipsoïde par les forces de marée. Un point de la Terre, entraîné par la rotation journalière, passe par les lieux d'élévation minimale et maximale de l'eau, d'où la succession des deux marées basses et des deux marées hautes au cours d'un journée.*

Puisque deux astres agissent (la Lune et le Soleil), l'océan est déformé en deux ellipsoïdes dont des grands axes ont des directions différentes. Les deux ellipsoïdes se mélangent et en fonction de la position relative des astres, ils s'ajoutent (les marées de vives-eaux lors de la Pleine et de la Nouvelle Lune) ou se retranchent (les marées de mortes eaux lors du Premier et du Dernier quartier), ce qui permet à Newton d'expliquer les variations semi-mensuelles des marées (Figure 3).

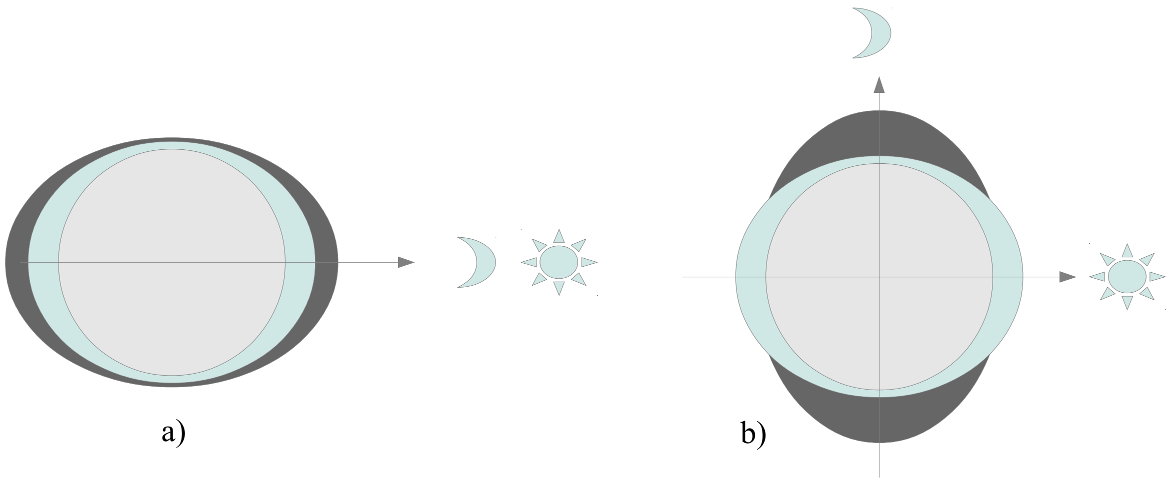


Figure 3 *: a) Lorsque la Terre, la Lune et le Soleil sont alignés (pleine ou nouvelle Lune), les marées lunaires et solaires s'ajoutent créant les marées de vives eaux. b) Lorsque la Terre, la Lune et le Soleil sont en quadratures (premier ou dernier quartier), les marées lunaires et solaires se détruisent mutuellement, créant les marées de mortes eaux.*

Newton montre encore que la force de marée exercée par un astre est proportionnelle à la masse de l'astre, au rayon de la Terre et inversement proportionnelle au cube de la distance Terre-astre. Avec nos notations (M_L et M_S : masses de la Lune et du Soleil ; d_L et d_S : distances de la Lune et du Soleil à la Terre ; R , rayon de la Terre), on a :

La force de marée due à la Lune F_{mL} est proportionnelle à $\frac{G M_L R}{d_L^3}$.

La force de marée due au Soleil F_{mS} est proportionnelle à $\frac{G M_S R}{d_S^3}$.

3. **Rapport masse de la Lune / masse de la Terre**

L'idée est de se servir de l'observation des marées pour déterminer le rapport entre les marées lunaires et les marées solaires. Ce rapport permet de connaître le rapport masse de la Lune / masse du Soleil et de là nous pouvons avoir le rapport masse de la Lune / masse de la Terre. La méthode est basée sur la variation de la hauteur de la marée au cours de la lunaison.

Le rapport entre les marées lunaires et les marées solaires

Nous appelons : h_L : la hauteur d'eau déplacée par l'action de la Lune (différence entre la marée haute et la marée basse précédente) et h_S : la hauteur d'eau déplacée par le Soleil. Nous supposons que les astres (la Lune et le Soleil) se déplacent dans l'équateur céleste (l'inclinaison des orbites est nulle) sur des orbites circulaires et nous regardons les variations de la hauteur de la marée pour un point de l'équateur terrestre. Nous supposons également que la hauteur d'eau est proportionnelle aux forces de marées et que le coefficient de proportionnalité *A* est le même pour la Lune et pour le Soleil (il s'agit de l'hypothèse des marées d'équilibre où les phénomènes dynamiques dus à la rotation de la Terre et à la configuration des bassins océaniques ne sont pas pris en compte). On a donc :

- pour la Lune : $h_L = A \times F_{mL}$ où F_{mL} est proportionnelle à $GM_L R_T / d_L^3$
- pour le Soleil : $h_S = A \times F_{mS}$ où F_{mS} est proportionnelle à $GM_S R_T / d_S^3$

Lors des Syzygies (Pleine et Nouvelle Lune), la Lune, la Terre, et le Soleil sont alignés. L'action du Soleil et l'action de la Lune sont dans la même direction et s'additionnent :

$$h_{Syz} = h_L + h_S = A(F_{mL} + F_{mS})$$

Lors des quadratures (Premier ou Dernier Quartier), la Lune, la Terre, et le Soleil forment un angle droit. Par conséquent, l'action du Soleil et l'action de La lune se compensent et se retranchent :

$$h_{qua} = h_L - h_S = A(F_{mL} - F_{mS})$$

Nous avons : $h_{Syz} + h_{Qua} = A(F_{mL} + F_{mS} + F_{mL} - F_{mS}) = 2A \times F_{mL}$

et $h_{Syg} - h_{Qua} = A(F_{mL} + F_{mS} - F_{mL} + F_{mS}) = 2A \times F_{mS}$

d'où : $\frac{h_{Syg} + h_{Qua}}{h_{Syz} - h_{Qua}} = \frac{F_{mL}}{F_{mS}}$

Le rapport F_{mL}/F_{mS} peut donc être connu simplement par l'observation des marées lors des syzygies et des quadratures.

Analyse des observations

Nous utilisons les données disponibles sur le site internet du SHOM (Service hydrographique et océanographique de la marine : http://www.shom.fr/) pour appliquer la formule précédente. Nous trouvons un fichier de données (fichier *brest-obs*) indiquant les hauteurs d'eau observées heure par heure pour tous les jours de l'année 2001 pour le port de Brest. Nous en donnons un extrait ci-dessous, qui concerne les 30 premiers jours de l'année.

```
OBSERVATIONS DE MAREE A BREST     Heure UT+1h
(signal maree observe avec effet meteo)

AAAA NUM JJJ  0h  1h  2h  ................................................................ 21h 22h 23h
2001   3   1 440 382 331 310 355 431 510 582 635 653 622 552 479 403 337 302 323 389 459 537 600 618 603 558
2001   3   2 496 437 384 350 345 390 458 527 590 631 625 581 524 449 379 331 312 327 378 446 512 550 571 554
2001   3   3 503 447 388 338 308 313 350 418 489 548 587 594 560 511 456 396 344 326 349 396 455 520 569 589
2001   3   4 580 544 491 439 391 355 349 385 439 507 555 584 602 571 508 444 376 326 307 334 379 437 506 577
2001   3   5 622 606 563 507 447 376 329 329 365 419 488 562 616 620 592 543 471 397 334 298 309 359 434 514
2001   3   6 575 611 607 554 488 414 341 283 266 305 377 461 545 606 624 596 531 450 366 289 247 260 327 415
2001   3   7 506 587 634 628 574 493 401 315 248 227 270 357 461 560 629 651 614 534 434 335 248 198 220 299
2001   3   8 408 523 615 664 655 585 483 374 275 197 177 237 343 465 581 661 683 634 537 423 308 213 164 194
2001   3   9 296 429 561 661 713 693 602 485 364 255 178 166 241 367 509 638 726 743 674 559 432 308 205 162
2001   3  10 213 328 475 616 717 761 716 615 480 340 213 132 133 226 363 515 647 727 729 644 520 382 249 146
2001   3  11 120 189 322 482 627 726 756 701 586 445 302 183 107 129 237 389 549 677 742 727 633 506 361 228
2001   3  12 137 127 209 353 519 656 739 757 691 566 417 279 164 103 137 251 411 566 678 730 702 601 469 330
2001   3  13 213 135 140 235 380 535 661 732 733 653 526 384 255 152 107 155 276 427 564 658 694 651 546 423
2001   3  14 304 201 139 161 261 403 544 646 698 688 604 485 359 247 163 137 200 318 451 566 640 660 611 516
2001   3  15 408 302 220 178 206 304 433 552 634 670 647 568 462 356 266 198 186 250 356 469 563 619 627 573
2001   3  16 491 401 317 244 211 249 338 447 545 610 633 607 535 446 363 290 234 232 289 378 471 545 587 594
2001   3  17 552 480 404 336 275 244 278 358 446 521 573 594 572 512 439 373 311 262 259 305 381 460 520 561
2001   3  18 572 540 479 413 354 299 271 294 359 436 502 550 575 565 515 454 398 341 290 278 317 380 447 510
2001   3  19 556 572 544 488 427 367 309 275 290 343 408 474 530 558 555 515 454 394 333 279 263 295 358 432
2001   3  20 503 559 575 553 499 428 357 297 259 267 320 393 470 531 566 567 525 460 392 327 270 250 287 363
2001   3  21 450 531 589 611 584 520 438 360 296 255 267 328 412 498 565 603 600 547 471 389 315 261 250 294
2001   3  22 383 486 571 631 645 610 532 439 351 285 258 288 364 455 546 615 656 634 555 464 378 296 246 254
2001   3  23 326 423 523 613 667 661 597 503 405 312 254 252 301 381 484 594 674 679 631 546 451 356 277 247
2001   3  24 281 364 473 582 664 694 658 571 462 352 262 205 221 300 416 531 622 677 665 588 496 391 295 224
2001   3  25 219 285 397 519 628 695 701 634 531 415 308 230 202 245 341 461 577 653 678 633 545 438 333 243
2001   3  26 200 233 324 443 570 661 698 673 591 479 360 265 207 209 285 405 535 640 694 681 605 498 390 291
2001   3  27 219 205 259 370 499 609 677 686 629 525 403 294 215 182 217 317 446 570 648 675 636 549 443 340
2001   3  28 265 225 242 326 449 571 662 699 676 594 477 361 267 210 204 270 382 503 600 649 639 575 476 371
2001   3  29 279 217 202 252 352 468 575 641 652 605 511 401 302 227 187 218 303 416 524 598 623 591 511 415
2001   3  30 325 259 217 224 299 405 512 598 643 630 561 466 370 288 231 220 270 364 467 553 600 599 551 472
```

Sur internet, nous retrouvons également les dates des phases de la Lune pour l'année 2001.

Première analyse

Nous regardons les hauteurs des marées lors des syzygies aux alentours de l'équinoxe de printemps (Pleine Lune le 9 mars et Nouvelle Lune le 25 mars). Ces marées des équinoxes sont les plus fortes de l'année. Les hauteurs d'eau sont données en mm, *MH* signifie marée haute et *MB* marée basse. L'excès est calculé en faisant la différence entre la somme des deux marées hautes quotidiennes et la somme des deux marées basses.

Date	MH matin	MH soir	MB matin	MB soir	Excès
09/03/01	752	763	104	114	648,5
10/03/01	785	776	79	83	699,5
11/03/01	796	764	91	81	694
12/03/01	780	748	96	118	657
25/03/01	711	691	162	156	542
26/03/01	719	707	149	159	559
27/03/01	723	706	157	159	556,5
28/03/01	723	706	165	184	540

Ces premiers calculs amènent deux surprises :

- Les plus fortes marées ne surviennent pas le jour même des syzygies mais le lendemain ou le surlendemain. (De la même manière, la marée haute ne coïncide pas avec le passage de la Lune dans le méridien ou dans l'anti-méridien, de l'autre côté de la Terre, mais quelques heures plus tard). Ces retards montrent que les marées ne correspondent pas à des marées d'équilibre (notre hypothèse) mais sont perturbées par des phénomènes dynamiques.

- Il y a une très forte différence entre l'excès d'une syzygie à l'autre (on passe d'un excès de 7,0 m le 10 mars à un excès de 5,6 m le 26 mars, quinze jours plus tard). Ces différences proviennent essentiellement de la variation de la distance Terre-Lune. La Lune tourne en effet autour de la Terre sur une orbite elliptique, sa distance à la Terre varie considérablement. Ainsi le 9 mars, elle est située à 56,6 rayons terrestres de la Terre et le 25 mars à 62,3 rayons terrestres (nous trouvons ces informations sur le site internet de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides : http://www.imcce.fr/, qui met à disposition un logiciel de calcul des éphémérides)

Quelles conséquences tirer de ces deux surprises :

- Nous ne calculerons pas directement l'excès de la marée haute sur la marée basse le jour des syzygies ni le jour des quadratures mais le lendemain et le surlendemain et nous prendrons la moyenne des deux jours.
- L'influence évidente de la distance Terre-Lune montre qu'il faut adopter une méthodologie adéquate pour analyser les observations. Nous nous servons du procédé de Laplace qui, en 1825, reprend la méthode de Newton en la perfectionnant.

Deuxième analyse avec l'aide de Laplace

Laplace remarque qu'un grand nombre de phénomènes perturbent les marées. Il explique que pour faire ressortir les phénomènes que l'on veut déterminer et augmenter nos chances de succès, il faut effectuer une combinaison avantageuse des observations. Nous exposons les différents points de notre méthodologie.

- *Nous considérerons l'excès de la haute mer sur la basse mer plutôt que simplement l'élévation de la marée haute.* Par ce procédé, l'influence des conditions météorologiques (en particulier le vent) devient presque nulle : si le vent élève la hauteur d'une pleine mer, il élève à peu près autant la basse mer voisine et son effet disparaît dans la différence des deux hauteurs.

- *Quel moment de l'année considérer ?* Le moment des équinoxes est le plus judicieux car alors le Soleil est dans l'équateur céleste. La Lune est également à peu près dans l'équateur céleste au moment des Pleines et des Nouvelles Lunes d'équinoxes (Figure 4), elle a cependant une déclinaison au moment des premiers et des derniers quartiers qui perturbe son action (mais dont nous ne tiendrons pas compte).

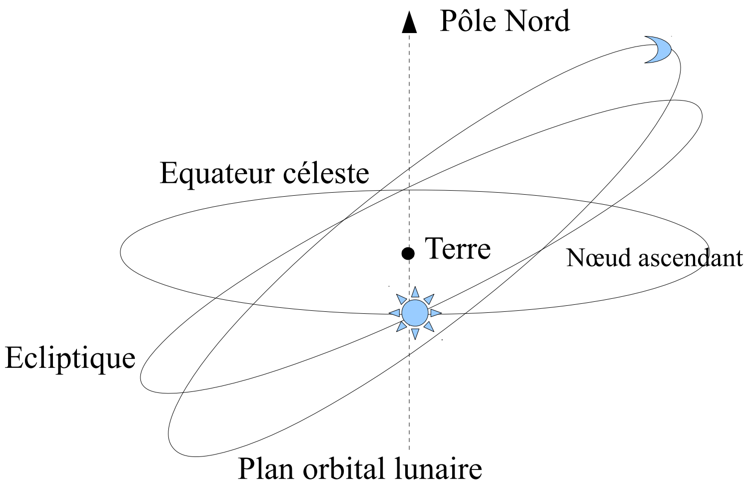


Figure 4 : L'orbite de la Lune est légèrement inclinée par rapport à l'écliptique. Aux équinoxes, le Soleil est dans l'équateur céleste. Au moment des Pleines et des Nouvelles Lunes, la Lune est donc elle aussi à peu près dans l'équateur céleste (puisque la Terre, la Lune et le Soleil sont alignés), ce qui n'est plus le cas au moment des premiers et derniers quartiers.

- *Comment tenir compte de la variation de distance de la Lune ?* Pour faire disparaître cette influence de la Lune, l'idée judicieuse de Laplace est de considérer trois syzygies (ou trois quadratures) consécutives autour des équinoxes et de faire la moyenne des excès en doublant la syzygie intermédiaire. Ainsi l'influence de la distance est moyennée car si la Lune est au périgée (plus proche distance de la Terre) lors d'une syzygie, elle sera à peu près à l'apogée (plus grande distance de la Terre) lors de la syzygie suivante.

- Pour améliorer les résultats, il conviendrait de ne pas travailler avec quelques observations isolées mais, au contraire, d'en utiliser un très grand nombres. Nous ne disposons cependant que des données de l'année 2001 et nous nous contenterons de faire la moyenne entre l'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'automne pour cette année là.

Les résultats

Pour l'équinoxe de printemps, nous étudions les syzygies du 8 mars, 25 mars et 8 avril (de l'année 2001) et les quadratures du 3 mars, 16 mars et 1er avril. Pour l'équinoxe d'automne, nous étudions les syzygies du 2 septembre, 17 septembre et 2 octobre et les quadratures du 10 septembre, 24 septembre et 10 octobre. Nous rappelons que le rapport des forces de marées lunaires sur les forces de marées solaires est calculé par :

$$\frac{F_{mL}}{F_{mS}}=\frac{h_{Syg}+h_{Qua}}{h_{Syz}-h_{Qua}}$$

Equinoxe de printemps

	date	MH matin	MH soir	MB journée	MB nuit	Excès	Excès moyen		F_{mL}/F_{mS}
Syzygies	10/03/01	785	776	79	83	699,5	696,75	616,38	2,29
	11/03/01	796	764	91	81	694			
Syzygies	26/03/01	719	707	149	159	559	557,75		
	27/03/01	723	706	157	159	556,5			
Syzygies	09/04/01	754	738	70	83	669,5	653,25		
	10/04/01	727	702	78	77	637			
Quadratures	04/03/01	561	557	299	301	259	274,25	241,13	
	05/03/01	558	591	285	285	289,5			
Quadratures	17/03/01	545	537	302	325	227,5	205		
	18/03/01	520	520	339	336	182,5			
Quadratures	02/04/01	545	556	276	298	263,5	280,25		
	03/04/01	558	591	271	284	297			

Equinoxe d'automne

Syzygies	03/09/01	650	669	168	148	501,5	541	618,19	2,22
	04/09/01	652	675	147	19	580,5			
Syzygies	18/09/01	735	766	58	41	701	697,5		
	19/09/01	754	759	66	59	694			
Syzygies	03/10/01	683	696	161	141	538,5	536,75		
	04/10/01	685	710	159	166	535			
Quadratures	11/09/01	533	523	274	286	248	247,5	234,38	
	12/09/01	526	530	282	280	247			
Quadratures	25/09/01	532	510	312	330	200	204		
	26/09/01	527	518	312	317	208			
Quadratures	11/10/01	536	538	288	277	254,5	282		
	12/10/01	570	585	288	248	309,5			

La moyenne des résultats obtenus pour l'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'automne donne :

$$\frac{F_{mL}}{F_{mS}}=2,25$$

Malgré nos hypothèses très simplificatrices, le résultat est étonnamment proche de la valeur moderne (2,18). Pour savoir s'il s'agit d'un « coup de chance » ou si la méthode est robuste, il faudrait analyser les hauteurs de marées de plusieurs années différentes.

Détermination de la masse relative de la Lune

Le rapport F_{mL}/F_{mS} s'écrit : $\frac{F_{mL}}{F_{mS}}=\frac{M_L}{M_S}\times\frac{d_S^3}{d_L^3}$. Nous pouvons en déduire le rapport M_L/M_S . Avec $d_S=150\times10^6 km$ et $d_L=384\times10^3 km$, il vient :

$$\frac{M_L}{M_S}=\frac{F_{mL}}{F_{mS}}\times\frac{d_L^3}{d_S^3}=3,77\times10^{-8}$$

Puisque nous avons vu que $\frac{M_S}{M_T}=3,35\times10^5$, il vient : $\frac{M_L}{M_T}=\frac{M_L}{M_S}\times\frac{M_S}{M_T}=0,0126=\frac{1}{79}$

La valeur est bonne puisque le rapport actuel est fixé à $1/81,3$. Newton, qui n'avait que quelques données d'observations de piètre qualité trouvait un rapport de $1/39,8$. Laplace, avec une analyse beaucoup plus fine que celle que nous avons présentée, un rapport de $1/75$.

Nous voyons donc qu'avec un procédé assez simple, il est possible d'avoir une bonne idée de la masse de la Lune, relativement à celle de la Terre. L'élément déterminant de la méthode et le plus intéressant est de comprendre comment combiner les observations pour faire disparaître les éléments perturbateurs (variations de distance de la Lune, effets météo) et faire ressortir les phénomènes que l'on veut étudier.