INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

DEPARTEMENT PREMIER CYCLE 2019-2020

Equipe pédagogique de chimie, physique, maths

RAPPELS DE CALCUL

Notions indispensables pour aborder les cours scientifiques de Première Année

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Pourquoi un tel enseignement au début de votre scolarité à l'INSA ?

Il est indispensable que vous possédiez, dès le début de votre scolarité de première année de l'INSA, une maîtrise parfaite de ces outils mathématiques. Cette maîtrise implique une absence de lacunes dans vos connaissances ainsi qu'une bonne technique vous permettant d'être suffisamment rapide et performant(e) dans vos calculs. Il est indispensable que vous puissiez faire porter votre effort sur la compréhension profonde des notions nouvelles qui vous seront exposées et non pas sur l'acquisition de techniques que vous devriez déjà maîtriser. En effet, si tel n'est pas le cas, vous risquez, par manque de technicité, de vous perdre dans des considérations secondaires de calcul, qui vous empêcheront d'aboutir à une compréhension en profondeur des notions exposées.

Un étudiant ingénieur sans technicité mathématique est tout aussi inefficace qu'un sculpteur sans burin ou un musicien sans instrument.

Ce fascicule fait suite à la page **Moodle Openinsa "Tremplin Calcul !"**[1] sur lequel vous avez pu vous entrainer au calcul cet été. Ce site reste ouvert, n'hésitez pas à y retourner pour retrouver les questions sur lesquelles vous avez bloqué et poser des questions à vos enseignants ! Les 12 thèmes de révision du lycée/collège de "Tremplin calcul" sont rassemblés ici. Certains thèmes seront repris en semaine 1 par vos enseignants de Chimie, Physique, Maths, d'autres seront revus ultérieurement, et deux thèmes supplémentaires ont été rajoutés. Tous sont les prérequis indispensables pour pouvoir aborder sereinement les disciplines scientifiques de l'INSA de Lyon. La maitrise de ces outils suppose une utilisation **fréquente** et **répétée**, Nous vous conseillons donc de garder ce fascicule pendant toute votre scolarité de Formation Initiale et à vous y reporter souvent pour être sûrs que vous n'oubliiez pas ces bases, en particulier de **relire les fiches avant les IE**. En complément, la page Moodle "Outils de Calcul"[2]vous permettra de continuer à vous entrainer toutes les semaines.

1. **Applications numériques :** thème revu en semaine 1 (Chimie), développé au semestre 1 en physique, indispensable en particulier en Chimie, Thermo, Physique
2. **Géométrie** : thème revu en semaine 1 (Chimie), indispensable en particulier en Chimie (cristallo), Physique (optique, ...), OMSI
3. **Ordres de grandeur :** nouveau thème introduit en semaine 1 (Physique) indispensable pour toute Résolution de Problème (Physique, Thermo, ...)
4. **Dérivées :** thème revu en semaine 1 (Physique), puis développé au semestre 1 en maths, indispensable en particulier en Physique et Maths
5. **Droites et proportionalité** : thème revu en semaine 1 (Physique), indispensable en particulier en Physique (électricité, TP, ...) et Chimie (TP, ...)
6. **Equations :** thème indispensable partout, considéré comme acquis, seule la méthode de résoluation des systèmes 2*2 par combinaison linéaire (beaucoup plus efficace et moins maitrisée que par substitution) sera travaillée en semaine 1 (Physique).
7. **Sommes** : nouveau thème introduit en semaine 1 (Maths)
8. **Trigonométrie** : thème revu en semaine 1 (Maths), indispensable en particulier en Physique (optique, mécanique, ...)
9. **Fonctions usuelles** : thème développé en Maths au semestre 1, indispensable en Physique (électricité, mécanique, ...)
10. **Simplifications :** thème indispensable partout, considéré comme acquis, si besoin posez vos questions aux enseignants de Maths, Physique, Chimie en semaine 1.
11. **Inéquations** : thème développé en Maths au semestre 1, indispensable en Physique, Maths, ...
12. **Primitives :** thème développé en Maths au semestre 1, indispensable en Physique, Thermo, Maths, ...
13. **Complexes** : thème développé en OMSI, indispensable en Physique (électricité, ondes...)
14. **Vecteurs :** thème développé en OMSI, indispensable en Physique (mécanique, électromagnétisme, ...)
15. **Alphabet Grec :** indispensable en Physique, Maths
16. **Classification périodique des éléments chimiques :** pas à connaitre, mais utile pour les exercices de Chimie

1. (https://open.insa-toulouse.fr/course/view.php?id=131
2. https://moodle.insa-lyon.fr/course/view.php?id=2531

Ce fascicule est avant tout un document pour votre travail personnel,

— vous indiquant les notions que vous devez absolument connaître avant d'aborder vos études en Premier Cycle,

— vous proposant plusieurs exercices pour acquérir une bonne maîtrise des connaissances et techniques mathématiques de base.

Table des matières

1 Applications numériques

Dans la plupart des disciplines scientifiques, vous aurez d'abord à déterminer l'expression littérale, puis à effectuer l'application numérique. Comment procéder ?

1. **Généralités :**
   Chaque grandeur physique d'un problème doit être associée à une lettre unique et clairement définie (Attention à ne pas appeler L par exemple toutes les longueurs d'un problème et/ou à confondre minuscules et majuscules). L'expression littérale est une équation donnant la grandeur inconnue en fonction de toutes les grandeurs littérales utiles du problème.
   Pour connaitre la valeur numérique il faut remplacer chaque lettre par sa { valeur numérique + unité }, les deux étant absolument indissociables, et les différentes opérations s'appliquant sur la valeur **et** sur l'unité.
   Exemple : volume V d'un tuyau cylindrique de longueur $L = 20m$ et de rayon $r = 2,5cm$.
   $V = \pi r^2 L = \pi(2,5cm)^2(20m) = 392,6990817m\,cm^2$
   Deux problèmes se posent alors : convertir les unités et garder un nombre adéquat de chiffres significatifs.

2. **Chiffres significatifs** (c.s.) **:**
   Attention : En physique $1,2 \neq 1,200$, En effet $x = 1,2$ signifie $1,15 < x < 1,25$ et $y = 1,200$ signifie $1,1995 < y < 1,2005$: x et y ne représentent donc pas la même chose, et il faut donc faire très attention **à combien de chiffres significatifs on écrit** (ici 2 pour x ou 4 pour y).
   les chiffres significatifs sont tous les chiffres d'un résultat numérique autres que les zéros précédant le premier chiffre différent de zéro. (Ex : $m = 0,05002730$kg, ou $m = 50,02730$g comportent 7 chiffres significatifs : on considère ici que ces 7 chiffres sont effectivement connus avec certitude).
   Reprenons l'exemple ci dessus : vue la précision sur L et r, il est illusoire d'espérer connaitre V à mieux que 1%, on garde donc 2 chiffres significatifs pour le résultat : $V = 3,9 \times 10^2 m\,cm^2$. (Remarque : écrire $V = 1,2\pi m\,cm^2$ serait faux puisque π irrationnel comporte un nombre infini de chiffres significatifs).

3. **Unités :**
   Les unités du système international sont : le mètre (m), le kilogramme (kg), la seconde (s), l'ampère (A), le kelvin (K), la mole (mol), le newton (N), le joule (J), ... Elles seront revues en première année. Les autres systèmes d'unités ne sont (dans un premier temps) pas à connaitre, les facteurs de conversion seront donnés dans les QCM de l'école d'été, mais les préfixes ci dessous sont à savoir :

	Multiples			Sous-multiples					
Préfixe	giga	méga	kilo	déci	centi	mili	micro	nano	pico
Symbole	G	M	k	d	c	m	μ	n	p
Facteur	10^9	10^6	10^3	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

   Pour convertir, on remplace chaque unité **directement dans l'expression numérique** et on applique les règles des puissances (cf fiche Simplifications). Reprenons l'exemple précédent :
   $V = \pi r^2 L = \pi(2,5cm)^2(20m) = \pi(2,5\,10^{-2}m)^2(20m) = 3927\,10^{-4}\,m^3 = 3,9 \times 10^{-2}m^3$ avec le bon nbre de c.s.
   Si on sait que $1\,inch = 2,54\,cm$, on peut convertir le résultat précédent en in^3 en remplaçant : $1\,cm = \frac{1}{2,54}in$, donc $V = 3927\,10^{-4}\,(\frac{100}{2,54}in)^3 = 2,4\,10^4 in^3$

4. **Différence absolue ou relative - pourcentage :**
   Les variations (ainsi que erreurs, incertitudes, ...) peuvent être exprimées en absolu ($\Delta V = V_{final} - V_{initial}$, même unité que V) ou en relatif ($\frac{V_{final}-V_{initial}}{V_{initial}}$ sans unité).
   Exemple : en hiver, le volume du tuyau peut diminuer tel que $V' = 3.7 \times 10^{-2}m^3$,
   on a alors $\Delta V = -0,2 \times 10^{-2}m^3$ et $\Delta V/V = -0,05 = -5\%$

Exercice 1 : Soit une solution S, obtenue par dissolution de 5 g de chlorure de sodium (NaCl) dans 25 g d'eau.

a) Calculer le pourcentage massique de NaCl dans la solution S obtenue.

b) Sachant que la masse volumique de la solution S est égale à 1,12 $g.cm^{-3}$, calculer la concentration molaire C (ou molarité) de NaCl dans la solution S.

c) La molalité (m) est le nombre de moles de NaCl par kilogramme d'eau. Calculer m.

Exercice 2 : Déterminer la fraction molaire de chacun des constituants d'une solution contenant 36 g d'eau (H_2O) et 46 g de glycérine ($C_3H_5(OH)_3$).

Exercice 3 : Une solution aqueuse d'ammoniaque contient 31,75 % en poids d'ammoniac (31,75 g de NH_3 pour 100 g de solution) et a comme masse volumique ρ = 885 $kg.m^{-3}$.

a) Quel est le nombre total de moles (H_2O + NH_3) dans un litre de solution ?

b) Quelle est la fraction molaire de NH_3 dans la solution ?

Exercice 4 : Dans le minerai de sulfure de zinc, 1 mole de ZnS est associée à 0,6 moles de silice (SiO_2). Calculer le pourcentage massique de sulfure de zinc correspondant.

Exercice 5 : L'énergie du niveau n de l'électron d'un ion hydrogénoïde (notion qui sera abordée en cours de Chimie 1) de numéro atomique Z s'exprime par$E = (hcRHZ^2)/n^2$. Calculer en joules l'énergie de l'électron de l'ion Li^{2+} (Z = 3) lorsqu'il est sur le niveau 2 (n = 2), avec : h = $6,6260693.10^{-34}$ J.s, c = 299 792 458 $m.s^{-1}$, RH = 109677.6 cm^{-1}.

Exercice 6 : Compléter le tableau ci-dessous :

Longueur d'onde	Fréquence (Hz)	Energie (eV)	Energie (kJ.mol^{-1})
1 km			
			$1,20.10^{-4}$
	3.10^{11}		
			2,39
800 nm			
4000 Å			
		8,28	
	6.10^{16}		
1 pm			
			$1,2.10^{10}$

$N_A = 6,023.10^{23} mol^{-1}$ $\quad h = 6,62.10^{-34} J.s$ $\quad c = 2,99.10^8 m.s^{-1}$ $\quad e = 1,602.10^{-19} C$

Exercice 7 : Calculer : E (eV) × (Å), avec : $h = 6,62.10^{-34} J.s$ $\quad c = 2,99.10^8 m.s^{-1}$ $\quad e = 1,602.10^{-19} C$

Exercice 8 : On trouve dans la littérature les expressions suivantes liant la pression de vapeur saturante ps (notion qui sera abordée en cours de Thermodynamique) du benzène à la température absolue T :

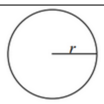
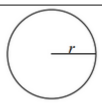
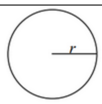
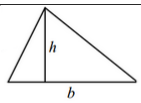
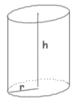
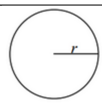
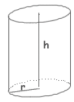
$$ln(p_s/p^\circ) = 20,767 - \frac{2773,8}{T - 53,08} \text{ avec } p^\circ = 1Pa$$

$$log_{10}(p_s/p^\circ) = \frac{0,05223 \times 32295}{T} + 7,6546 \text{ avec } p^\circ = 1mmHg$$

Calculer, en utilisant successivement les deux relations, les valeurs de la pression de vapeur saturante (en mm Hg) du benzène à 20°C (293,15 K) et à 80°C (353,15 K).

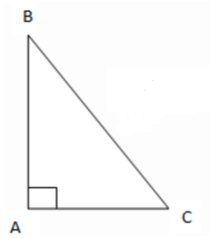
2 Géométrie

1. **Périmètres, aires et volumes :**

Périmètre	Aires				Volumes	
cercle	disque	sphère	triangle	cylindre de révolution	Boule	cylindre de révolution
rayon r	rayon r	rayon r	hauteur h base b	rayon r hauteur h	rayon r	rayon r hauteur h
						
$2\pi r$	πr^2	$4\pi r^2$	$\frac{b \times h}{2}$	$2\pi r \times h$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$h \times \pi r^2$

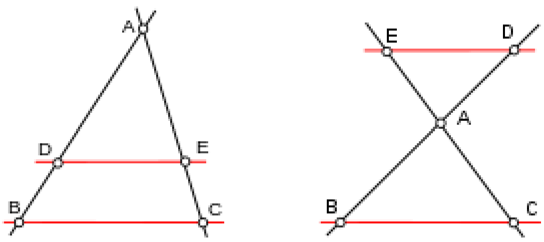
Bien entendu, on peut vérifier que le périmètre est homogène à une longueur L, les aires à L^2 et les volumes à L^3. On peut aussi vérifier les ordres de grandeur : par exemple l'aire d'un disque de rayon r doit être plus petite que celle d'un carré de côté $2r$; on a bien $\pi r^2 \sim 3r^2 < (2r)^2 = 4r^2$. De même pour le périmètre du cercle $2\pi r \sim 6r < 4 \times 2r = 8r$, pour le volume de la boule $4/3\pi r^3 \sim 4r^3 < (2r)^3 = 8r^3$...

2. **Théorème de Pythagore :**
Si un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $CB^2 = AC^2 + AB^2$, CB étant appelée l'hypoténuse du triangle rectangle.



3. **Théorème de Thalès :**
Soit deux droites sécantes en A, deux points D et B sur la première droite et E et C sur la deuxième droite, tels que (DE) soit parallèle à (BC), alors :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ et } \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$



Exercice 1 : Cf Figure (a) ci dessous. Le repère (Ox, Oy, Oz) est orthogonal. Soit le plan (ABC). H' est la projection orthogonale de O sur AB. H est la projection orthogonale de O sur CH'. Montrer que la distance du point O au plan (ABC) vaut $d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}}}$

Exercice 2 : Soit un volume V_A= 250 mL de liquide A et V_B= 50 mL de liquide B. Les deux liquides ne sont pas miscibles (ils ne sont pas solubles l'un dans l'autre, comme l'eau et l'huile). Quelle sera l'aire de la surface de contact entre les deux liquides si le liquide B est dispersé dans A sous forme de gouttelettes de 1 mm de diamètre puis de 0,1 mm de diamètre ? Donner le rapport des aires des surfaces de contact en fonction du rapport des rayons des gouttelettes.

Exercice 3 : Cf Figure (b) ci dessous. Soit un cube de côté, ou arête, a. Exprimer la diagonale d'une face et la grande diagonale du cube en fonction de a.

a) On inscrit un octaèdre dans le cube (Figure (b) ci dessous, forme en traits gras : bipyramide à base carrée) : les six sommets de l'octaèdre sont placés sur les centres des six faces du cube. Calculer la longueur des côtés de l'octaèdre puis son volume en fonction de$a$.

b) Faire l'application numérique pour a= 2 cm. Les résultats seront exprimés dans les unités suivantes : cm, m, nm, Å.

Exercice 4 : Soit un cube de côté, ou arête, a. On peut obtenir un tétraèdre régulier ABCD inscrit dans ce cube en utilisant un sommet du cube sur deux, comme sur la Figure (c) ci dessous.

a) Montrer que les angles AOB, BOC, COD et DOA sont égaux et calculer leur valeur en degrés et minutes.

b) Exprimer le volume d'un tétraèdre régulier de côté b en fonction de b. Application numérique pour $b = 2.10^{-9}$ m.

c) Exprimer le volume de ce tétraèdre en fonction de a, arête du cube représenté. Comparer ce volume au volume du cube dans lequel on pourrait inscrire ce tétraèdre.

Exercice 5 : On peut reconstituer un cube de côté a à partir d'octaèdres et de tétraèdres :

— un premier octaèdre centré sur le centre du cube, représenté en trait gras (Figure (b)),

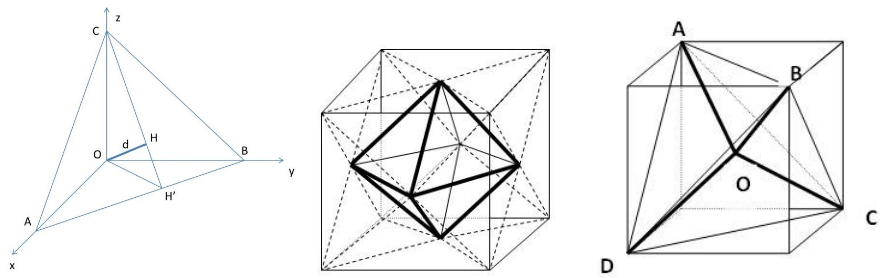
— puis 8 tétraèdres (représentés en tirets) dont l'une des faces (sa base) est l'une des faces de l'octaèdre précédent, le 4ème sommet du tétraèdre constituant le sommet du cube,

— et enfin 12 quarts d'octaèdres pour combler les espaces restants, près des 12 arêtes.

Montrer que la somme des volumes des octaèdres et des tétraèdres permet de retrouver le volume du cube.

Exercice 6 : On considère un prisme droit à base losange. Soit a le côté du losange, α l'angle aigu de ce losange et b la hauteur du prisme. Exprimer le volume du prisme en fonction de a, b et α. Faire l'application numérique pour a = 2 cm, b = 5 cm, α= 60°. Le résultat sera exprimé dans les unités suivantes : cm^3,m^3, nm^3, $Å^3$.

Exercice 7 : Ox et Oy sont deux demi-droites issues d'un point O. A et B sont deux points quelconques sur Ox et M un point sur Oy. Construire : N sur Oy tel que (BN) // (AM) et C sur Ox tel que (NC) // (MB). Démontrer que OB^2 = OA.OC



(a) (b) (c)

FIGURE 2.1 – Figures des exercices ci-dessus

3 Ordres de grandeurs

Il est souvent très utile de pouvoir estimer même grossièrement un résultat avant de se lancer dans un calcul. On utilise pour cela des raisonnements d'ordre de grandeur.

On appelle en physique « l'ordre de grandeur d'un nombre » son arrondi à la puissance de 10 la plus proche. Example, l'ordre de grandeur de l'altitude au sommet du Mont Blanc est 10^3m , mais c'est 10^4m pour le Mont Everest.

Il est indispensable pour un ingénieur de connaitre l'ordre de grandeurs des objets qu'il manipule de manière à pouvoir jeter un regard critique sur les résultats qu'il obtient par le calcul. L'acquisition de ces ordres de grandeurs va se faire au fur et a mesure de vos apprentissages, mais vous devez déjà connaitre l'odre de grandeur des longueurs usuelles, et être capable d'estimer grossierement des ordre de grandeurs de masse, de forces, ... etc.

• Commencez par utilisez l'animation Scale of the Universe de manière à completer la liste des ordres de grandeurs de longueur ci desssous (en m): ***http://htwins.net/scale2/lang.html***

1. Diamètre du noyau d'un atome ....
2. Diamètre d'un atome...
3. Cellule...
4. Longueur d'onde de la lumière rouge...
5. Dimension du plus petit objet visible à l'œil nu..............................
6. Diamètre de la terre...
7. Diamètre du soleil ....
8. Distance Terre – Soleil ....
9. Distance a Proxima du Centaure (l'étoile la plus proche du système solaire)
10. Diamètre de la voie lactée ....

• Estimez les ordres de grandeurs suivants :

1. La masse de l'eau contenue dans une baignoire (pleine).........................
2. Le poids de l'eau contenue dans une baignoire (pleine).........................
3. La force maximale que peut exercer un adulte peu sportif........................
4. La valeur d'une année lumière..
5. La vitesse d'une mouche..
6. L'énergie cinétique d'une voiture sur autoroute.................................
7. La vitesse du centre de la terre dans sa trajectoire autour du soleil (dans un référentiel héliocentrique)..................
8. La vitesse d'un point de l'équateur (dans un référentiel géocentrique)..................
9. Le temps qu'il faut à la lumière du soleil pour nous arriver.............................
10. Le volume des océans...
11. Le volume de votre corps ?...
12. L'épaisseur d'une feuille de papier ?...
13. Combien de litres d'eau boit un être humain dans sa vie ? ....
14. Quel volume de glace des glaciers devrait fondre pour faire monter le niveau des océans de 1 cm ?........................
15. En fait le niveau des océans monte surtout à cause de la dilatation thermique de l'eau. En considérant que $1m^3$ d'eau voit son volume augmenter de 0,2 dm^3 si la température augment d'1°C, estimer quelle élévation de température ferait monter le niveau des océans de 1 cm. ....

4 Équations

Résoudre une équation veut dire trouver les valeurs d'une (ou plusieurs) inconnue(s) vérifiant cette équation. En maths, l'inconnue s'appellera généralement x (ou parfois, soyons fous, y). En physique, la première difficulté sera d'identifier les grandeurs connues et inconnues.

Dans cette fiche l'inconnue sera notée $\heartsuit$ (ou $\diamondsuit$) et a, b, c, d , e, f seront supposés connus ($\in \mathbb{R}$).

1. **Principe général de résolution :**
   - Si on a des fractions, il faut commencer par les mettre au même dénominateur (noter la condition de non annulation de ce dénominateur) puis écrire l'égalité sur les numérateurs
   - Ensuite on regroupe les termes en $\heartsuit^2$, $\heartsuit^1$, $\heartsuit^0$(= les termes connus). Si le degré est supérieur à 2 (présence de termes en $\heartsuit^p$ avec $p > 2$) on doit chercher une racine 'évidente' A puis factoriser par $\heartsuit - A$.
   - Exemple : $\frac{a-\heartsuit}{\heartsuit} = \frac{\heartsuit-b}{c\heartsuit-1} \Leftrightarrow \frac{(a-\heartsuit)(c\heartsuit-1)-\heartsuit(\heartsuit-b)}{\heartsuit(c\heartsuit-1)} = 0$
   $$\Leftrightarrow \heartsuit \neq 0 \text{ et } \heartsuit \neq 1/c \text{ et -}(1+c)\heartsuit^2 + (b+1)\heartsuit - a = 0$$
   - A la fin, vérifier son résultat en remplaçant dans l'équation initiale !

2. **Équation du premier degré :**
   - Uniquement des termes en $\heartsuit^1$et $\heartsuit^0$
   - Exemple : $a\heartsuit + b = 0 \Leftrightarrow \heartsuit = -b/a$

3. **Équation du deuxième degré :**
   - Uniquement des termes en $\heartsuit^2$, $\heartsuit^1$ et $\heartsuit^0$
   - Exemple : $a\heartsuit^2 + b\heartsuit + c = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
     - Si $\Delta > 0$ il y a 2 racines réelles : $\heartsuit = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $\heartsuit = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
     - Si $\Delta = 0$ il y a 1 racine réelle : $\heartsuit = \frac{-b}{2a}$
     - Si $\Delta < 0$ il n'y a pas de racine réelle, mais 2 racines complexes : $\heartsuit = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ou $\heartsuit = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$
   - Si on n'a pas de terme en $\heartsuit^1$, exemple : $\heartsuit^2 + d = 0$, il est bien sur inutile de calculer un discriminant :
     - Si $d < 0$ alors $\heartsuit = \sqrt{-d}$ ou $\heartsuit = -\sqrt{-d}$
     - Si $d > 0$ alors $\heartsuit = i\sqrt{d}$ ou $\heartsuit = -i\sqrt{d}$

4. **Système de 2 équations à 2 inconnues :**

   Exemple : $\begin{cases} a\diamondsuit + b\heartsuit = c & (1) \\ d\diamondsuit + e\heartsuit = f & (2) \end{cases}$ Il existe deux méthodes :
   - La substitution (à privilégier uniquement si a ou b ou d ou e est égal à 0 ou 1) : on exprime par exemple $\diamondsuit = \frac{c-b\heartsuit}{a}$ grâce à (1) et on remplace dans (2).
   - La combinaison linéaire (dans le cas général) : pour trouver $\heartsuit$ on multiplie par exemple (1) par $-d$ et (2) par a puis on somme. On obtient alors directement $\heartsuit = \frac{af-dc}{ae-db}$

Exercice : Systèmes de 2 équations 2 inconnues. Résoudre le plus rapidement possible les systèmes suivants :
$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x-2y=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 4x+2y=8 \end{cases}$

5 Dérivées

(f, u, g fonctions dérivables)

1. **Définition :**
   La dérivée est définie comme la limite du taux de variation : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
   Ceci a plusieurs conséquences importantes :
   — La dérivée en un point donne le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $f(x)$ en ce point.
   — La dérivée est donc utile pour savoir si la fonction est croissante ($f'(x) > 0$), décroissante ($f'(x) < 0$) ou a atteint un extrémum (alors $f'(x) = 0$ sur un intervalle ouvert).
   — En physique la dérivée est souvent notée $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\text{variation élémentaire de } f}{\text{variation élémentaire de } x}$.

2. **Composée de fonctions :**
   Pour une fonction composée $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ on a :
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad \text{soit} \qquad (f \circ u)'(x) = (f' \circ u)(x) \times u'(x)$$

3. **Dérivées des fonctions usuelles à connaitre par cœur :**
   Dans le tableau ci dessous, pour la première colonne u est la variable dont dépend f, et on dérive donc f par rapport à u. Dans la deuxième colonne $u(x)$ est une fonction de x et on dérive f par rapport à x.

	$\frac{\mathrm{d}(f(u))}{\mathrm{d}u}$	$\frac{\mathrm{d}(f(u(x)))}{\mathrm{d}x}$
$f(u) = \ln(\lvert u\rvert)$	$\frac{1}{u}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$f(u) = \exp(u)$	$\exp(u)$	$u'(x) \times \exp(u(x))$
$f(u) = \cos(u)$	$-\sin(u)$	$-u'(x) \times \sin(u(x))$
$f(u) = \sin(u)$	$\cos(u)$	$u'(x) \times \cos(u(x))$
$f(u) = \frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}$	$-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$
$f(u) = \sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(u) = u^n$ $(n \neq -1)$	$n\, u^{n-1}$ $(n \neq -1)$	$n\, u'(x)\, (u(x))^{n-1}$ $(n \neq -1)$

4. **Produit, somme**

$$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$$

$$(f + g)' = f' + g' \qquad \text{et} \qquad (af)' = af' \quad (\text{avec } \ a = cste)$$

Exercice 1 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur les intervalles convenables :

— $f_1(t) = \cos(1 - 8t)$
— $f_2(t) = \sqrt{\sin(t)}$
— $f_3(x) = (sin(x))^6$
— $f_4(y) = \sqrt{1 + y + y^2}$
— $f_5(u) = cos(u)\, e^u$
— $f_6(v) = Asin\left(\frac{v+a}{2}\right)$

Exercice 2 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur les intervalles convenables :

— $f_1(t) = \frac{sin(t)}{1+t^2}$
— $f_2(z) = ln(2cos^2 z - 1)$
— $f_3(s) = (s-1)ln(\left|s^2 - 1\right|)$
— $f_4(v) = \sqrt{(v^3 - \frac{1}{v})}$

Exercice 3 :

- Dériver par rapport à la variable la fonction n suivante : $n(D_m) = sin\left(\frac{A+Dm}{2}\right)/sin\left(\frac{A}{2}\right)$.
- Dériver par rapport à z : $P(z) = m\frac{g_0 R^2}{(R+z)^2}$.
- Dériver par rapport à T : $(T) = S\,A\,T^2\, e^{\frac{q\Phi}{kT}}$.

Exercice 4 : A l'état solide cristallisé, le chlorure de sodium est constitué d'un empilement régulier d'anions Cl^- de rayon R et de cations Na^+ de rayon r. Ces ions occupent donc partiellement l'espace disponible et on peut définir la compacité de la structure comme le rapport du volume occupé (ion = sphère dure) sur le volume disponible. Dans le cas de NaCl, cette compacité est égale à $C = \frac{4\times(\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{4}{3}\pi r^3)}{(2r+2R)^3}$:

a) Exprimer la compacité en fonction du rapport $x = R/r$.

b) Pour quelle valeur de x la compacité est-elle minimum ?

6 Droites et proportionnalité

On se limite ici aux droites du plan (O,x,y)

1. **Droites affines (cas général) :**
   - Une équation de droite s'écrit dans le cas général $y = ax + b$ avec :
     - a **le coefficient directeur** (indique de combien y augmente quand x augmente de 1
     - b **l'ordonnée à l'origine** (la valeur de y quand la droite coupe l'axe des ordonnées)
     - Cas particulier : si la droite est parallèle à l'axe (Oy), a est n'est pas défini et on a alors l'équation $x = x_o$
   - Lorsque la représentation graphique est donnée, on peut soit lire a et b sur le graphique, soit (en TP par exemple) prendre 2 points (éloignés) A et B de la droite et calculer $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Si l'intersection avec la droite des ordonnées n'est pas visible, on calcule $b = y_A - ax_A$. Bien entendu a et b ont des unités ! (b a la même unité que y, et a a la même unité que y/x).
   - Pour trouver l'équation de la droite à partir d'un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, le plus simple est d'écrire que $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.
   - Pour trouver l'équation de la droite à partir de deux points A et B de la droite, le plus simple est d'écrire que $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

2. **Droites linéaires et proportionnalité :**
   Le cas particulier où $b = 0$ est très courant. La représentation graphique de $y(x)$ est alors une droite passant par l'origine et les deux grandeurs x et y sont **proportionnelles**. a s'appelle alors constante de proportionnalité entre x et y. Dans ce cas, il suffit de connaitre un couple $(x_1; y_1)$ pour déterminer soit x_2 soit y_2 à l'aide d'un tableau :

x_1	y_1
x_2	?

$$y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1}$$

Exemples : *à vitesse constante la distance parcourue est proportionnelle au temps de trajet, à masse volumique homogène la masse est proportionnelle au volume, pour une espèce chimique donnée le nombre de moles est proportionnel à la masse....*

Exercice 1 : Des expériences consistant à mesurer la valeur d'une grandeur y en fonction d'une autre grandeur x ont conduit aux résultats suivants :

x	3,42	3,34	3,30	3,28	3,25	3,21
y	-9,53	-8,65	-7,97	-7,18	-6,63	-6,05

a) Montrer graphiquement que ces points peuvent être raisonnablement modélisés par $y = ax + b$

b) Estimez a et b, ainsi que leur incertitude

c) Estimer y pour $x = 3,29$.

Exercice 2 : Cet exercice est à traiter à l'aide d'un tableur. La longueur d'onde λ_{K-L} des rayons X émis par les atomes dépend du numéro atomique Z de ces derniers. Des mesures ont permis de déterminer les valeurs suivantes :

Elément	**Titane**	**Fer**	**Zinc**	**Molybdène**	**Argent**	**Or**
Z	**22**	**26**	**30**	**42**	**47**	**79**
λ_{K-L}(**Å**)	**2,750**	**1 ,937**	**1,437**	**0,711**	**0,561**	**0,182**

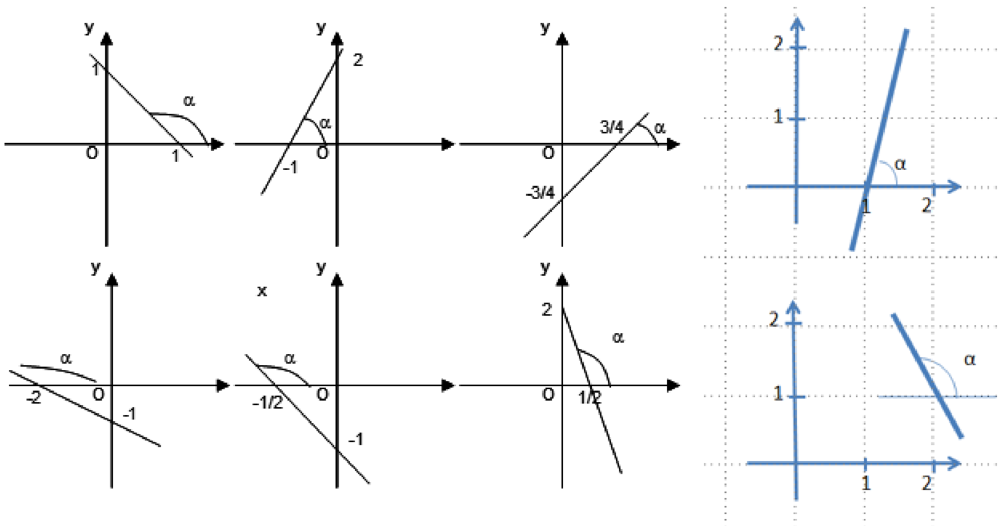
a) Vérifier graphiquement que λ_{K-L} et $1/\lambda_{K-L}$ ne varient pas linéairement avec Z.

b) Vérifiez graphiquement que $1/\sqrt{\lambda_{K-L}}$ varie linéairement avec Z et déterminer l'équation liant les deux grandeurs.

c) Déterminer les longueurs d'onde λ_{K-L} émises par le cuivre (Z = 29) et le tungstène (Z = 74). Les valeurs seront déterminées par 3 méthodes :
- en utilisant l'équation déterminée précédemment,
- en utilisant le produit en croix (théorème de Thalès),
- graphiquement (veiller alors à utiliser un graphe utilisant une échelle suffisamment dilatée pour permettre une lecture précise).

Dans les tous les exercices suivants le plan est muni d'un repère$(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 3 : Donner les équations de ces droites et l'inclinaison par rapport à l'horizontale dans chacun de ces cas :



Exercice 4 : Dans chacun des cas suivants, (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, B est-il un point de (D) ?

a) A=O, $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$, B(1, -3)

b) A(2, -3), $\vec{u} = 3\vec{i} - 6\vec{j}$, B(3, -5)

c) A(3, 0), $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$, B(2, 3)

d) A(1, 2), $\vec{u} = 6\vec{i} + 9\vec{j}$, B(-3, -4)

Exercice 5 : Déterminez une équation de la droite (D) :

a) (D) passe par A(1, -3) et B(2, 4)

b) (D) passe par A(-3, 1) et B(-3, 2).

c) (D) passe par A(3, 5) et admet $\vec{v}(1, -1)$ pour vecteur directeur.

d) (D) passe par A(-2, 1) et admet $\vec{v}(2, 3)$ pour vecteur directeur.

e) (D) passe par A(1, 2) et admet 3 pour coefficient directeur.

f) (D) passe par A(-1, 3) et admet 0 pour coefficient directeur.

7 Le symbole $\sum$

Si m et n sont deux entiers tels que $n \leq m$ et si a_k est une expression qui dépend de k, pour $n \leq k \leq m$, on note $\sum_{k=n}^{m} a_k$ la somme $a_n + a_{n+1} + ... + a_{m-1} + a_m$.

Par exemple,

$$\sum_{k=n}^{m} k = n + (n+1) + ... + (m-1) + m = \frac{(m-n+1)(n+m)}{2}$$

$$\sum_{k=n}^{m} q^k = q^n + q^{n+1} + ... + q^{m-1} + q^m = \frac{q^n - q^{m+1}}{1-q} = \frac{q^n \left(1 - q^{m-n+1}\right)}{1-q} \quad \text{pour tout } q \neq 1.$$

En particulier, on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout $q \neq 1$.

Exercice 1 .

1. Ecrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$:
   (a) $1 + 2^3 + 3^3 + ... + 150^3$.
   (b) $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{66}$.
   (c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{29}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

$$\sum_{p=1}^{n} p.n = \sum_{k=1}^{n} k.n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) n = k \left(\sum_{k=1}^{n} n\right).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression des sommes suivantes sans utiliser le symbole $\sum$:

(a) $\sum_{k=0}^{30} (-1)^k$.

(b) $\sum_{k=0}^{n+2} 5$.

(c) $\sum_{k=10}^{20} (2k-4)$.

(d) $\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2^k}$.

(e) $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{5k-31}}{7^{2k+1}}$.

(f) $\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n}$.

(g) $\sum_{k=3}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$

(h) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} jk$.

(i) $\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

(i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$).

Exercice 2.

1. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$.
2. En déduire une expression simplifiée (sans symbole $\sum$) de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Exercice 3.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.

Exercice 4.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et n un entier non nul.

Pour une série de données (x_i) avec $1 \leq i \leq n$, on rappelle les formules suivantes :

la moyenne $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{V}$ où $V = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

1. Montrer que $V = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2$.
2. On pose pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $y_i = ax_i + b$. Calculer la moyenne $\overline{y}$ et l'écart-type σ_y de la série de données (y_i), en fonction de $\overline{x}$ et de σ_x.
3. Lors d'un examen, 10 étudiants ont les notes suivantes :

$$10,5 \quad 13 \quad 6 \quad 7 \quad 9,5 \quad 18 \quad 15 \quad 5,5 \quad 10 \quad 8$$

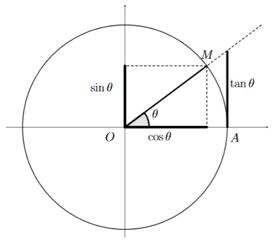
   (a) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série de notes.

   (b) On souhaite par une transformation affine, ramener les notes à une moyenne de 11 et un écart-type de 3. Comment choisir a et b ?

8 Trigonométrie

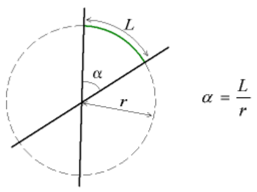
À première vue, on peut croire qu'il y a beaucoup de formules à apprendre en trigonométrie. Ce n'est pas forcément vrai, car beaucoup peuvent se retrouver facilement, en particulier avec l'aide d'un petit dessin sur votre brouillon.

1. **Définitions :**
Dans un triangle rectangle, pour chaque angle non-droit on définit le côté adjacent à l'angle et le côté opposé. On a alors les relations suivantes (**SOHCAHTOA**) :
$Sinus = \frac{Oppos\acute{e}}{Hypoth\acute{e}nuse}$, $Cosinus = \frac{Adjacent}{Hypoth\acute{e}nuse}$, $Tangente = \frac{Oppos\acute{e}}{Adjacent} = \frac{Sinus}{Cosinus}$

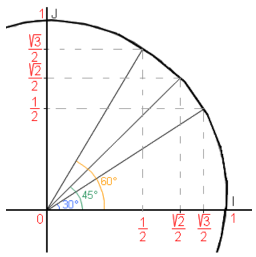


Dans le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1, notons M le point du cercle tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta$. On retrouve que $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point M et $\sin(\theta)$ son ordonnée.

2. **Angles remarquables :**



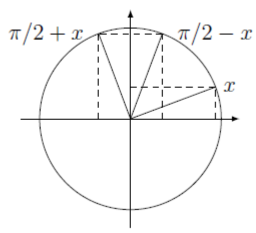
Définition du radian : Considérons un secteur angulaire, formé de deux droites sécantes distinctes, et un cercle de rayon r et de centre le point d'intersection des droites. Alors, la valeur de l'angle en radians (rad) est le rapport entre la longueur L de l'arc de cercle intercepté par les droites et le rayon r : $\alpha = \frac{L}{r}$. **L'angle correspondant à un tour est donc 2π radians.**



Il faut savoir placer sur le cercle trigonométrique les angles suivants pour retrouver rapidement leur sinus et cosinus :

Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Valeur en degré	0	30°	45°	60°	90°	180°	180°	360°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Les relations ci-dessous **ne sont pas à apprendre**, elles doivent être retrouvées rapidement à l'aide du cercle trigonométrique :



Par exemple la figure ci contre permet de retrouver :

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

De la même manière un dessin permet de retrouver :

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

1. **Formules de trigonométrie :** $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a \quad (\text{prendre } b = a)$$
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \quad (\text{se retrouvent à partir de } \cos(2a))$$

Exercice 1 (question de cours)

A l'aide d'un schéma compléter les équivalences ou égalités suivantes :

- $\cos(x) = \cos(a) \Longleftrightarrow ...$
- $\sin(x) = \sin(a) \Longleftrightarrow ...$
- $\cos(-x) = ...$ $\quad \cos(\pi - x) = ...$ $\quad \cos(\pi + x) = ...$ $\quad \cos(x - \pi) = ...$ $\quad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = ...$
- $\sin(-x) = -...$ $\quad \sin(\pi - x) = ...$ $\quad \sin(\pi + x) = ...$ $\quad \sin(x - \pi) = ...$ $\quad \sin(x - \frac{\pi}{2}) = ...$

Exercice 2

Résoudre chacune des équations et inéquations suivantes dans l'intervalle précisé :

1. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, sur $\mathbb{R}$, sur $I = [0, 2\pi]$.
2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, sur $\mathbb{R}$, sur $I = [0, 2\pi]$ puis sur $J = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.
3. $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $I = [-\pi, \pi]$.
4. $\cos x \leq \frac{1}{2}$ sur $I = [-\pi, \pi]$.
5. $\sin x > -\frac{1}{2}$ sur $I = [0, 3\pi]$.

Exercice 3

A l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près des réels θ, ϕ et γ tels que :

1. $\cos\theta = -0,85$ et $\theta \in [\pi, 2\pi]$.
2. $\cos\phi = 0,4$; $\sin\phi < 0$ et $\phi \in [0, 2\pi[$.
3. $\sin\gamma = 0,7$ et $\gamma \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos 2x + \cos x = 0$.
2. $\cos 2x + \cos x = -1$.
3. $\cos 2x + 2\sin^2 x - 2\sin x \leq 0$.
4. $\cos 4x - 2\sqrt{3}\cos 2x + \frac{5}{2} = 0$.
5. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x \geq 0$.
6. $\cos 3x + \sin 3x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

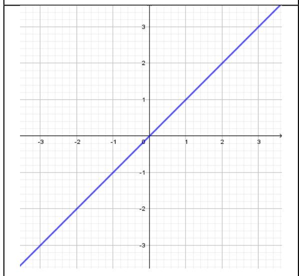
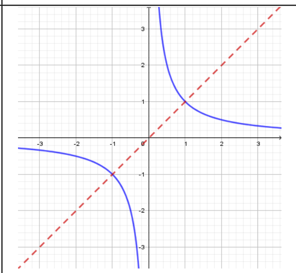
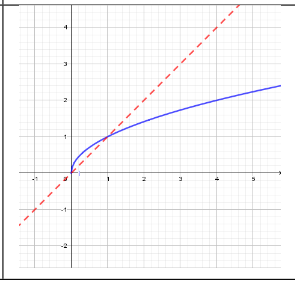
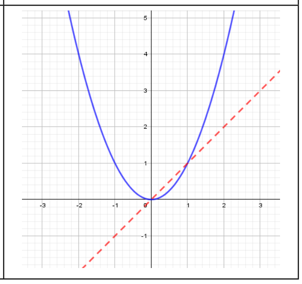
Exercice 5

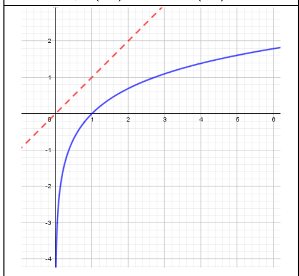
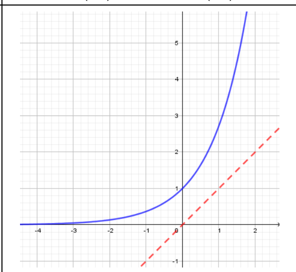
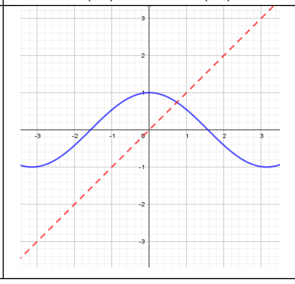
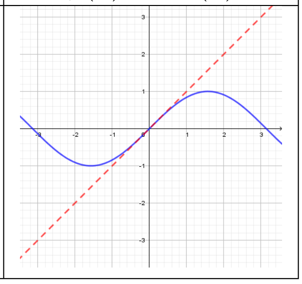
Dessiner (sans calculatrice graphique) l'allure de la fonction $f(x) = 4\cos(6\pi x - \frac{\pi}{4})$

9 Fonctions usuelles

Il est indispensable de connaitre l'allure des fonctions usuelles.

1. **Fonctions usuelles :** $f(x)$ en trait plein, $y = x$ en trait pointillé

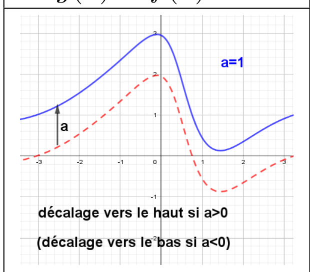
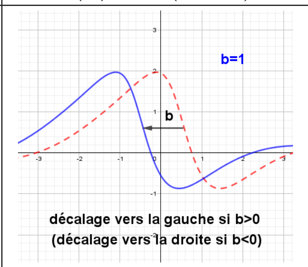
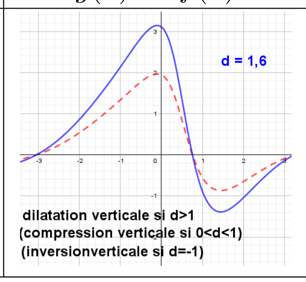
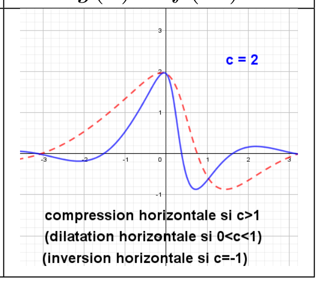
$f(x) = x$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = x^2$
droite	hyperbole	racine	parabole
			

$f(x) = \ln(x)$	$f(x) = \exp(x)$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$
			

La connaissance de ces représentations graphiques permet de **retrouver** rapidement toutes les limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$ ainsi que les limites $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, voire $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$, entrainez vous !

$f(x)$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim_{x\to0^+} f(x)$	$\lim_{x\to0^-} f(x)$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$	$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$
$\frac{1}{x}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	$+\infty$	×	0	×	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	$+\infty$	(0)	(0)	$+\infty$	(0)
$\ln(x)$	$+\infty$	×	$-\infty$	×	0	$-\infty$
$\exp(x)$	$+\infty$	0	(1)	(1)	$+\infty$	$+\infty$
$\cos(x)$	×	×	(1)	(1)	0	$+\infty$
$\sin(x)$	×	×	(0)	(0)	0	1

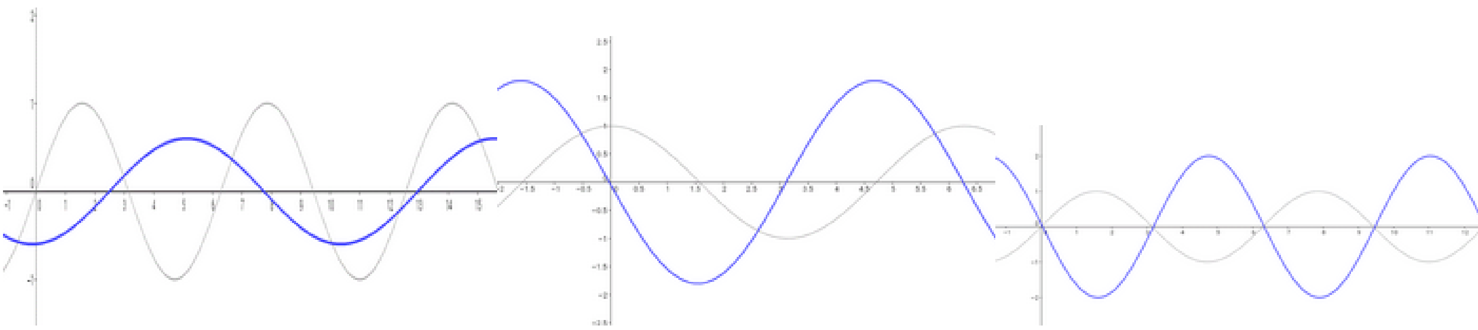
2. **Fonctions associées :**
La connaissance des 4 règles de composition ci-dessous ($f(x)$ en pointillé et $g(x)$ en trait plein) permet avec les fonctions usuelles de retrouver pratiquement toutes les fonctions rencontrées en physique.

$g(x) = f(x) + a$	$g(x) = f(x + b)$	$g(x) = df(x)$	$g(x) = f(cx)$
			

Quelques questions de "Tremplin Calcul!"

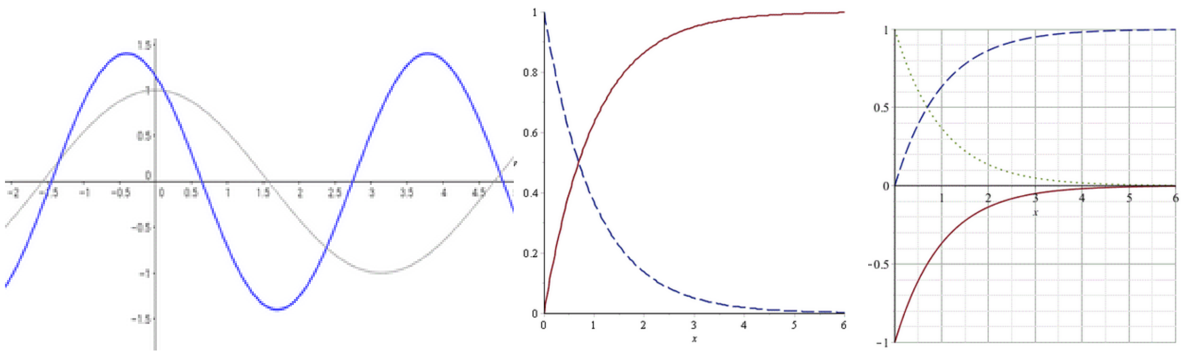
.... n'hésitez pas à poser vos questions à vos enseignants!

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\exp x}{x} = \ldots$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+\cos(x)} + \sqrt{1-\cos(x)} = \ldots$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{x} = \ldots$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{3x} = \ldots$
5. La courbe grise de la Figure 1.a représente la fonction $f(t) = \sin(t)$ et la courbe bleue représente la fonction $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$, avec $A > 0$, $\omega > 0$ et $-\pi < \phi \leq \pi$. A est il > 1 ou < 1? ω est il > 1 ou < 1? ϕ est il > 0 ou < 0?
6. La courbe grise de la Figure 1.b représente la fonction $f(t) = \cos(t)$ et la courbe bleue représente la fonction $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, avec $A > 0$, $\omega > 0$ et $-\pi < \phi \leq \pi$. Donner la valeur de ϕ.
7. La courbe grise de la Figure 1.c représente la fonction $f(t) = \sin(t)$ et la courbe bleue représente la fonction $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$, avec $A > 0$, $\omega > 0$ et $-\pi < \phi \leq \pi$. Donner la valeur de ϕ.
8. La courbe grise de la Figure 2.a représente la fonction $f(t) = \cos(t)$ et la courbe bleue représente la fonction $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, avec $A > 0$, $\omega > 0$ et $-\pi < \phi \leq \pi$. A est il > 1 ou < 1? ω est il > 1 ou < 1? ϕ est il > 0 ou < 0?
9. La courbe bleue en pointillée sur la Figure 2.b représente la fonction $f(x) = \exp(-x)$ et la courbe rouge en trait plein représente la fonction $g(x) = A\exp(-cx) + B$. Donner la valeur de A, B, c.
10. Soient les 3 fonctions suivantes: $f(x) = exp(-x)$; $g(x) = -exp(-x)$; $h(x) = 1 - exp(-x)$. A quelles fonctions correspondent les représentations graphiques de la Figure 2.c?



(a) (b) (c)

FIGURE 9.1



(a) (b) (c)

FIGURE 9.2

10 Simplifications

Il est indispensable de toujours simplifier au maximum vos calculs.

Par exemple même si l'expression $A = \frac{(R^2-r^2)(R+r)}{(R^2+r^2+2Rr)(R-r)}$ *peut être mathématiquement juste, elle n'est d'aucune utilité sous cette forme puisque dans ce cas* $A = 1$ *!*

1. **Identités remarquables :**
   — $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   — $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   — $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

2. **Fractions :**
   — Addition : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ (donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$)
   — Multiplication : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
   — Division : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ (diviser revient à multiplier par l'inverse)
   — Simplification : factoriser et chercher les facteurs communs entre numérateur et dénominateur.

3. **Puissances :**
   — $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ et $a^n/a^p = a^{n-p}$
   — $(a^n)^p = a^{np}$
   — $1/a^n = a^{-n}$
   — $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ et $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
   — $a^0 = 1$ et $a^1 = a$

4. **Logarithme et exponentielle :**
   — $\exp x = e^x$ avec $e \approx 2,71828$
   — $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$ et $\exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b}$
   — $\exp(\ln(x)) = x$ et $\ln(\exp(y)) = y$
   — $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
   — $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

Quelques questions de "Tremplin Calcul!"

.... n'hésitez pas à poser vos questions à vos enseignants!

1. Ecrivez le plus simplement possible $\ln(\frac{P_1}{P_2}) + \ln(\frac{P_2}{P_3}) + \ln(\frac{P_3}{P_1})$
2. Ecrire le plus simplement possible $\left(\frac{\ln(e^{x^2})}{e^{-\ln(x)}}\right)^{\frac{1}{3}}$
3. Développer l'expression $(2x-5)(-x+7)$.
4. Factoriser l'expression $-10x + 25 + x^2$.
5. Factoriser l'expression $(x+1)^3 - (x+1)$.
6. Factoriser l'expression $\frac{1}{16}x^2 - 64$.
7. Soit les réels non nuls a, b, et c tels que : $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Donner l'expression littérale de b sous la forme d'une fraction.
8. Simplifier l'expression $\frac{\frac{7}{6}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}-2} \times \frac{81}{50}$ sous forme de fraction irréductible.
9. L'expression $\frac{2^2 \times 10^{-10} \times 2^7 \times 10^{-6}}{32 \times 10^{-15}}$ peut se simplifier sous la forme $2^a 5^b$. Donner la valeur de a et b.
10. Simplifiez au maximum l'expression $\frac{2\sqrt{21}\sqrt{75}}{\sqrt{35}\sqrt{20}}$

11 Inéquations et valeurs absolues

1. **Règles pour les inégalités :**
   Si $A > B$, alors :
   — $A + k > B + k$ quelque soit le signe de k
   — $kA > kB$ si et seulement si $k > 0$
   — $kA < kB$ si et seulement si $k < 0$
   — $kA = kB = 0$ si et seulement si $k = 0$

2. **Résolution d'inéquations :**
   Principe : il faut chercher à factoriser (cf fiche équation), puis étudier le signe de chacun des facteurs et faire un tableau de signe.
   Exemple :

$A = \frac{x^2+x-2}{1-2x} > 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)}{1-2x} > 0$

	-2 $\frac{1}{2}$ 1			
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$1-2x$	$+$	$+$	$-$	$-$
A	$+$	$-$	$+$	$-$

Donc $x < -2$ ou $\frac{1}{2} < x < 1$

3. **Valeur absolue :**
   — Si $A > 0$ alors $|A| = A$
   — Si $A < 0$ alors $|A| = -A$
   — On a donc $|A| > 0 \quad \forall A\,!$

Quelques questions de "Tremplin Calcul!"

.... n'hésitez pas à poser vos questions à vos enseignants!

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3}{x-1} \geqslant \dfrac{2}{x-4}$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} > 1 - \frac{5}{6}x$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2}{3}x - \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$.
4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > b$, on a $|a+2| > |b+2|$, vrai ou faux ?
5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $(-2\varphi - 6)\left(\frac{\varphi}{3} - 4\right) \geqslant 0$.
6. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(-\frac{x}{2} - 3\right)\left(-3x + \frac{1}{6}\right) > 0$.
7. Résoudre l'équation $|x-3| + |x-1| = 2$
8. Simplifier pour $x \in [-5; 2]$: $|x-2| + |x+5|$
9. Résoudre l'inéquation dans $\mathbb{R}$: $|2x+4| > 6$.
10. Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$: $\left|x^2 - 8x + 11\right| = 4$

12 Primitives - intégrales

f et u fonctions dérivables

1. **Différence entre primitive et intégrales :**
   - **La primitive** $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ est une fonction qui vérifie $F'(x) = f(x)$. Il y a donc une infinité de primitives de la fonction f qui diffèrent toutes par une constante.
     - On note souvent abusivement $F(x) = \int f(x)dx$ (sans bornes!)
   - **L'intégrale** entre a et b de la fonction $f(x)$ est un nombre qui vérifie $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
     - (On voit que la constante de la primitive est ici sans importance puisqu'elle se simplifie).
   - Le symbole $\int_a^b$... se lit aussi « **somme** de a à b... » en effet $\int_a^b f(x)dx$ correspond à la somme de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur infiniment fine dx entre $x = a$ et $x = b$.
     (Si $b > a$ et $f(x) > 0$ c'est donc « l'aire sous la courbe de f »)

2. **Primitive des fonctions usuelles :**
   Revoir le tableau des dérivées des fonctions usuelles, on a alors facilement (à la constante K près), $n \neq 1$.

$\int \frac{du}{u}$	$\int \exp(u)du$	$\int u^n du$	$\int \frac{du}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{du}{u^2}$	$\int \cos(u)du$	$\int \sin(u)du$
$\ln(\|u\|) + K$	$\exp(u) + K$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + K$	$2\sqrt{u} + K$	$-\frac{1}{u} + K$	$\sin(u) + K$	$-\cos(u) + K$

   Remarque 1 : u peut être soit une variable « muette » (notée généralement x en maths et généralement tout sauf x en physique) soit une fonction $u(x)$ (dérivable), auquel cas $du = u'(x)dx$ (voir fiche dérivée).

   Remarque 2 : Comme il est beaucoup plus facile de dériver que d'intégrer, nous vous conseillons de toujours vérifier votre intégrale en re-dérivant.

3. **Principe des « intégrales à vue »**
   Lors d'intégrale de fonctions composées, on cherche à faire apparaitre $\int f'(u) \times du = \int f'(u(x)) \times u'(x)dx = f(u(x)) + K$ en multipliant éventuellement par une constante .

   Exemple 1 : $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \frac{1}{2}\ln(u(x)) + K = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K$ en posant $u(x) = x^2 + 1$

   Exemple 2 : $\int \sin(x)\exp(\cos(x))dx = -\int(-\sin(x)) \times \exp(\cos(x))dx = -\int u'(x) \times \exp(u(x))dx = -\exp(u) + K = -\exp(\cos(x)) + K$ en posant $u(x) = \cos(x)$

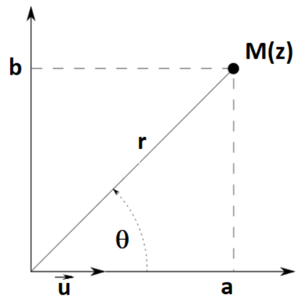
Quelques questions de "Tremplin Calcul!"

.... n'hésitez pas à poser vos questions à vos enseignants!

1. Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(x^5 + 4x^2 + 3x + 1\right)\, \mathrm{d}x$.
2. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\, \mathrm{d}t$
3. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{6}{(x+2)^2}\, \mathrm{d}x$.
4. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \left(x^3 + 2\right)^3\, \mathrm{d}x$
5. Soit la fonction $f\colon x \longmapsto 4x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 2$. Déterminer l'expression $F(x)$ de la primitive de f sur $I = \mathbb{R}$ qui s'annule en $a \in I$.
6. Soit la fonction $f\colon x \longmapsto 1 - \sin(2x)$. Déterminer l'expression $F(x)$ de la primitive de f sur $I = \mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
7. Soit la fonction$f\colon x \longmapsto \frac{1}{\mathrm{e}^{-5x}}$. Déterminer l'expression $F(x)$ de la primitive de f sur $I = \mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
8. Calculer $\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t$ pour $\omega = \frac{2\pi}{T}$
9. Soit la fonction $f\colon x \longmapsto \cos(x) \cdot \sin^2(x)$. Déterminer l'expression $F(x)$ de la primitive de f sur $I = \mathbb{R}$ qui s'annule en π.
10. Soit la fonction $f\colon x \longmapsto \frac{1}{(x+1)^4}$. Déterminer l'expression $F(x)$ de la primitive de f sur $I = \mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

13 Complexes

On note ici $i^2 = -1$, mais en physique ce complexe sera noté j



1. **Forme algébrique :** $z = a + ib$ avec a et b réels
   - Partie réelle et partie imaginaire
     - On appelle $a = \mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de z, et $b = \mathrm{Im}(z)$ la partie imaginaire de z
   - Interprétation géométrique
     - A chaque complexe $z = a + ib$ on peut associer un point M du plan tel que a soit l'abscisse de M et b son ordonnée. On dit que z est l'affixe de M.
     - Au vecteur $\overrightarrow{MM'}$ on peut donc associer le complexe $Z = z' - z$ (Z s'appelle l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$)
   - Règles de calcul avec la forme algébrique ($z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$)
     - $\mathrm{Re}(z + z') = a + a' = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = b + b' = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$
     - $\mathrm{Re}(z \times z') = aa' - bb' \neq \mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z \times z') = ba' + ab' \neq \mathrm{Im}(z) \times \mathrm{Im}(z')$
     - **La forme algébrique est donc à privilégier en cas de somme** (ou de différence) de complexes.
   - Conjugué

     Si $z = a+ib$ est l'affixe du point M, alors $a-ib$ est l'affixe du point symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. On appelle $\overline{z} = a - ib$ le conjugué de z. On a donc $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

2. **Forme exponentielle :** $z = r\,e^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
   - Module et argument
     - On appelle $r = |z| > 0$ le module de z et $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ (modulo 2π) l'argument de $z \neq 0$
   - Interprétation géométrique
     - A chaque complexe $z = r\,e^{i\theta}$ on peut associer un point M du plan tel que r soit la distance OM (ou norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$) et θ l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ unitaire de l'axe des abscisses. De la même manière, $|z' - z|$ est la distance entre M et M' et $\mathrm{Arg}(z' - z)$ est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{u}$.
     - La figure ci dessus permet de retrouver facilement $a = r\cos(\theta)$, $b = r\sin(\theta)$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.
   - Règles de calcul avec la forme exponentielle ($z = r\,e^{i\theta}$ et $z' = r'\,e^{i\theta'}$), on retrouve facilement
     - $\overline{z} = r\,e^{-i\theta}$ et $z\overline{z} = |z|^2$
     - $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ et $\mathrm{Arg}(z + z') \neq \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$
     - $|z \times z'| = r \times r' = |z| \times |z'|$ et $\mathrm{Arg}(z \times z') = \mathrm{Arg}(rr'e^{i(\theta+\theta')}) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$
     - $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{r}{r'} = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\mathrm{Arg}(\frac{z}{z'}) = \mathrm{Arg}(\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')})$=$\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z')$

   La forme exponentielle est donc à privilégier en cas de produits (quotients et puissances) de complexes.

Quelques questions de "Tremplin Calcul!"

.... n'hésitez pas à poser vos questions à vos enseignants!

1. Soit $z = 2 - 2j$ avec j le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. Donner le module et l'argument de z
2. Soit $z = -3 + i\sqrt{3}$ avec i le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. Donner le module et l'argument de z
3. Soit $z = jL\omega$ avec j le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, et Let ω deux réels positifs. Donner le module et l'argument de z.
4. Soit $z = R + \dfrac{1}{jC\omega}$ avec j le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, et C, R et ω tris réels positifs. Donner le module de z.
5. Soit $z = 3e^{j\frac{2\pi}{3}}$ avec j le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z.
6. Soit $z = 5e^{-j2\pi}$ avec j le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z.
7. Donner l'écriture exponentielle du nombre $z = \dfrac{2-2i}{\sqrt{3}+i}$
8. Combien vaut le module de $z = \frac{-2(1+2i)^2}{(2-i)^2}$?

14 Vecteurs

1. **Définitions :**
   Un vecteur $\overrightarrow{u}$ peut être défini de deux manières différentes :
   — par ses 3 composantes dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ que l'on choisira ici orthonormé direct :
   $$\overrightarrow{OM}(x;y;z) \iff \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$
   — par sa norme, sa direction et son sens :
     — La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ représente la distance entre le point O et le point M.
     $$\text{On a } \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$
     — La direction et le sens est souvent donné par le **vecteur unitaire** (vecteur de norme 1) : $\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

2. **Propriétés :**
   Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère, $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}(x';y';z')$ deux vecteurs, a un réel, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points :
   — $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff x = x'$ et $y = y'$ et $z = z'$
   — $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour composantes $(x + x'; y + y'; z + z')$
   — $a\overrightarrow{u}$ a pour composantes $(ax; ay; az)$
   — $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
   — I le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2})$
   — $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de **Chasles**)

3. **Produit scalaire :**
   On peut définir le produit scalaire de 2 vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ à partir de leurs composantes OU bien à partir de leur (norme + sens + direction) :
   $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' \qquad \text{OU} \qquad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$
   Deux vecteurs sont donc orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Le résultat d'un produit scalaire est un réel qui peut être positif ou négatif selon que les 2 vecteurs forment un angle aigu ou obtus.

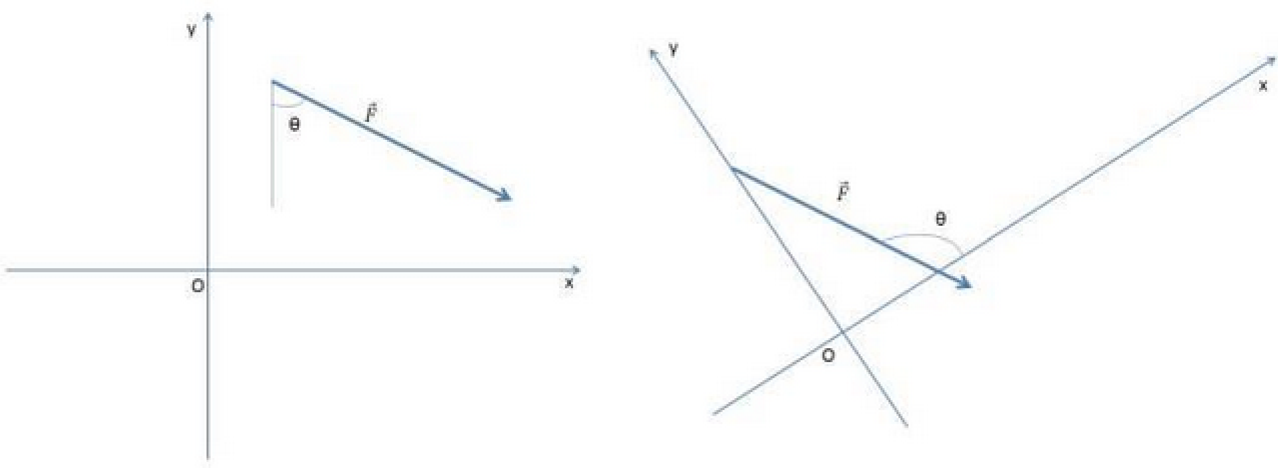
4. **Projection d'un vecteur $\overrightarrow{F}$ sur un axe**
   En physique on appelle souvent « projection de $\overrightarrow{F}$ sur (Ox) » la composante de $\overrightarrow{F}$ sur (Ox) c.à.d F_x. Les trois composantes d'un vecteur sont des grandeurs algébriques (c'est-à-dire qu'elles peuvent être positives ou négatives) contrairement à la norme qui est toujours positive.
   La composante d'un vecteur sur un axe (en physique « projection d'un vecteur sur un axe ») s'obtient facilement en faisant le produit scalaire de ce vecteur avec le vecteur unitaire de l'axe.
   Par exemple : $\boxed{F_x = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u_x} = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \cos(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{u_x})}$ car $\|\overrightarrow{u_x}\| = 1$ si $\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Ox).

5. **Additions de vecteurs**
   Attention : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \neq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$. Pour sommer des vecteurs il est indispensable de les projeter, c'est à dire de sommer les composantes.

Quelques questions de "Tremplin Calcul!"

.... n'hésitez pas à poser vos questions à vos enseignants!

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(0; \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}}\right)$, les vecteurs $\vec{u}\,(-1,2,-2)$ et $\vec{v}\,(-\alpha,3,2\alpha)$ sont orthogonaux si et seulement si $\alpha =$ ...
2. Soit $\overrightarrow{u}(2,-1,1)$ Donner la valeur numérique de $\|\overrightarrow{u}\|^2$.
3. Soient $\overrightarrow{u}(-1,4,-1)$ et $\overrightarrow{v}(-2,3,-2)$ Donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
4. AVEC CALCULATRICE: On donne la mesure des normes des vecteurs$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et la mesure α, en radians, de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Calculer le produit scalaire$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. La réponse sera donnée avec 2 chiffres significatifs. $\|\overrightarrow{u}\| = 10$;$\|\overrightarrow{v}\| = 10$; $\alpha = \pi/10$
5. On donne la mesure des normes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. On cherche à déterminer la valeur absolue de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en degré (compris entre 0° et 180°). $\|\overrightarrow{u}\| = 2$; $\|\overrightarrow{v}\| = 3$; $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -3$
6. Soit le vecteur $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. Simplifier au maximum cette expression.
7. Sur la Figure (a) ci dessous, quelle est l'expression littérale de la composante F_x du vecteur $\vec{F}$ sur l'axe (Ox)?
8. On munit le plan d'un repère $\left(O; \vec{\mathrm{i}}; \vec{\mathrm{j}}\right)$. Les points A, B et C sont-ils alignés ? $A\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$;$B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.
9. On munit le plan d'un repère $\left(O; \vec{\mathrm{i}}; \vec{\mathrm{j}}\right)$. Déterminer si les vecteurs$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et, le cas échéant, déterminer le réel k tel que $\vec{u}= k\,\vec{v}$.$\vec{u}\begin{pmatrix}0,5\\0.25\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$
10. Sur la Figure (b) ci dessous, quelle est l'expression littérale de la composante F_x du vecteur $\vec{F}$ sur l'axe (Ox)?



(a) (b)

FIGURE 14.1 – Figures des exercices ci-dessus

15 Alphabet grec

Malheureusement, l'alphabet latin est loin de comporter assez de lettres pour nommer toutes les grandeurs scientifiques. Il est donc indispensable de maitriser aussi l'alphabet grec. Vous trouverez ci-dessous le tableau de l'alphabet grec (appellation des lettres, graphie des minuscules et majuscules) dont la plupart des lettres sont utilisées en sciences.

Entrainez-vous à savoir les lire et les écrire !

Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	A
bêta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε	E
dzêta	ζ	Z
éta	η	H
thêta	θ	Θ
iota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu	μ	M
nu	ν	N
xi	ξ	Ξ
omicron	o	O
pi	π	Π
rhô	ρ	P
sigma	σ	Σ
tau	τ	T
upsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
khi	χ	X
psi	ψ	Ψ
oméga	ω	Ω

Attention, même avec cet alphabet supplémentaire, le nombre de symboles reste insuffisant. Une même lettre pourra être employée pour représenter plusieurs grandeurs (ex : ρ peut être une masse volumique, une résistivité, une densité volumique de charge. . .),

16 Tableau des éléments chimiques

Classification périodique des éléments

Dans chaque case, en haut, à gauche : numéro atomique, à droite : masse atomique

1 1,0 H Hydrogène																	2 4,0 He Hélium
3 6,9 Li Lithium	4 9,0 Be Béryllium											5 10,8 B Bore	6 12,0 C Carbone	7 14,0 N Azote	8 16,0 O Oxygène	9 19,0 F Fluor	10 20,2 Ne Néon
11 23,0 Na Sodium	12 24,3 Mg Magnésium											13 27,0 Al Aluminium	14 28,1 Si Silicium	15 31,0 P Phosphore	16 32,1 S Soufre	17 35,5 Cl Chlore	18 39,9 Ar Argon
19 39,1 K Potassium	20 40,1 Ca Calcium	21 45,0 Sc Scandium	22 47,9 Ti Titane	23 50,9 V Vanadium	24 52,0 Cr Chrome	25 54,9 Mn Manganèse	26 55,8 Fe Fer	27 58,9 Co Cobalt	28 58,7 Ni Nickel	29 63,5 Cu Cuivre	30 65,4 Zn Zinc	31 69,7 *Ga* Gallium	32 72,6 Ge Germanium	33 74,9 As Arsenic	34 79,0 Se Sélénium	35 79,9 *Br* Brome	36 83,8 Kr Krypton
37 85,5 Rb Rubidium	38 87,6 Sr Strontium	39 88,9 Y Yttrium	40 91,2 Zr Zirconium	41 92,9 Nb Niobium	42 95,9 Mo Molybdène	43 98,9 Tc* Technétium	44 101,6 Ru Ruthénium	45 102,9 Rh Rhodium	46 106,4 Pd Palladium	47 107,9 Ag Argent	48 112,4 Cd Cadmium	49 114,8 In Indium	50 118,7 Sn Etain	51 121,8 Sb Antimoine	52 127,6 Te Tellure	53 126,9 I Iode	54 131,3 Xe Xénon
55 132,9 *Cs* Césium	56 137,3 Ba Baryum	Série des lanthanides	72 178,5 Hf Hafnium	73 180,9 Ta Tantale	74 183,8 W Tungstène	75 186,2 Re Rhénium	76 190,2 Os Osmium	77 192,2 Ir Iridium	78 195,1 Pt Platine	79 197,0 Au Or	80 200,6 *Hg* Mercure	81 204,4 Tl Thallium	82 207,2 Pb Plomb	83 209,0 Bi Bismuth	84 210,0 Po Polonium	85 210,0 At Astate	86 222,0 Rn Radon
87 223,0 *Fr* Francium	88 226,0 Ra Radium	Série des actinides															

LANTHANIDES

	57 138,9 La Lanthane	58 140,1 Ce Cérium	59 140,9 Pr Praséodyme	60 144,2 Nd Néodyme	61 144,9 Pm* Prométhium	62 150,4 Sm Samarium	63 152,0 Eu Europium	64 157,2 Gd Gadolinium	65 158,9 Tb Terbium	66 162,5 Dy Dysprosium	67 164,9 Ho Holmium	68 167,3 Er Erbium	69 168,9 Tm Thulium	70 173,0 Yb Ytterbium	71 175,0 Lu Lutécium
ACTINIDES	89 227,0 Ac Actinium	90 232,0 Th Thorium	91 231,0 Pa Protactinium	92 238,0 U Uranium	93 237,1 Np* Neptunium	94 244,1 Pu* Plutonium	95 243,1 Am* Américium	96 247,0 Cm* Curium	97 247,1 Bk* Berkélium	98 251,1 Cf* Californium	99 252,0 Es* Einsteinium	100 257,1 Fm* Fermium	101 258,0 Md* Mendélévium	102 259,1 No* Nobélium	103 260,1 Lr* Lawrencium

Dans les conditions normales, les corps purs sont à l'état solide (**Xx**), liquide (*Xx*) ou gazeux (Xx). Eléments artificiels : X*